



Investigation of Two-Dimensional Geometric Patterns of Knot Arrangements and other Cryptographic Methods on the Surfaces of Ancient Tiles (Kashis) and its Adaptation to Three-Dimensional Arrangement of Atoms in Crystalline Solids

Mehdi Alavi *

Professor, Faculty of Chemistry, University of Isfahan, Isfahan, IRAN

Received: 11/11/2021

Accepted: 21/12/2021

Abstract

The art and techniques of colorful tiling in domes, inscriptions, minarets of mosques, buildings and historical monuments from antiquity, is a valuable and important document about the decorations of ancient Iranian architecture [1]. Ancient mathematicians, designers, and practitioners used the geometric methods of knot arrangement, Yazdi-bandi, Muqarnas, (Ahu pai) and other methods, with the help of geometric arrangement of squares, diagonals, rhombuses, and techniques such as "square-to-circle correlation" with the term "mandala". The identification and production of the primary units of geometrical "motifs" began centuries ago and includes geometric units in two dimensions. These motifs have been developed in different historical periods by geometers and designers. It is clear that mathematical-geometric laws have remained fixed in motifs throughout the past. This means that the laws of symmetry have a main origin, in a way that they have been fixed in different historical periods. On the other hand, alignment, balance and symmetry are necessary for each other. Geometry has been used since ancient times to measure the surfaces of buildings and agricultural lands. Points, line segments, angles, circles, squares and triangles have been used in the production of two-dimensional patterns in the order of regular patterns.

Keywords: Tile Work Patterns, Symmetrical Patterns, Patterns of Crystals Structures, Template Matching, Versatility of Pattern

*Corresponding Author: m.alavi@Sci.ui.ac.ir

Copyright© 2021, the Authors | This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms

Introduction

In 1912, symmetry was applied to the science of crystallography using X-ray diffraction by the German Physicist “Max von Laue”. The terms “symmetry elements” and “symmetry operations” are the main foundations of the science of symmetry [4], which are used and recognizable in the geometric patterns of tiles although the designers of tile motifs in the past have not mentioned it in geometric patterns and there are no reports of it available. A Symmetry element is a geometrical entity about which a symmetry operation is performed; an element can be : a point, axis, or plane, A symmetry operation is the Movement of an element such that after the movement appears the same as before.

In this study, while examining the geometric patterns of ancient tiles, using two-dimensional visual methods and adapting it to the science of symmetry used in the structure of crystalline solids, including the mapping of atoms in a three-dimensional, two-dimensional and one-dimensional lattice of atoms, it was determined that both types of arrangements follow the basic rules and science of symmetry.

While the length of the primary cell of the crystal lattice structure is about a few angstroms, the length of one side of the geometric motifs in the geometric patterns of the tiles is about 1010 times bigger; Therefore, it is concluded that the science of symmetry for very small (invisible) and very large components is established under special conditions. In this regard, the knowledge of symmetry can exist and be studied and used in other sciences.

In ancient times, geometry and mathematical knowledge were associated with mystical sciences. Plato and later Pythagoras addressed this issue in a spiritual way, because they considered the concept of geometry as a path to perfection and believed that geometry strengthens the notion to comprehend the structure of the universe. Knowledge of geometric patterns also creates unity in the spatial order. Burkhart Titus has said that every art is science and every science is art. It has been said that geometry is a science that is used in Islamic art to reflect the images of the imaginary world, which is related to the nature “well-conditioned” of geometry and mathematics.

Tiling is the knowledge of experimental sciences and original Iranian arts, examples of which are found in monuments and holy places in different cities of Iran. Tilework has been used as beautiful and attractive decorations in the buildings of Tehran [5], such as Shams al-Amara mansion and Golestan palace and older buildings in the cities of Isfahan, Tabriz, Yazd, Mashhad and other cities of Iran. [7]

Methods

This article uses the method of comparison and similarity. The knowledge of symmetry is used to determine the atomic structure of crystalline materials (International Union of Crystallography). Symmetry knowledge was developed by European scientists in the 19th century to form symmetric groups. The methods of producing ancient geometric patterns in Iran have been implemented using experimental designs based on complex and "cryptographic" drawings. While the methods of determining the atomic structure of crystalline solids have been based on the use of x-ray diffraction. The geometry of ancient Iran with the invisible arrangement of atoms in the structure of crystals shows the existence of knowledge of symmetry in both methods in the same way.

Results and Discussion

In the tile works, each motif has a special meaning and concept. A general overview shows that the origin of the patterns used in the tiles can be divided into three main groups:

- A) Motifs of objects that are present and visible around; Such as human, animal, plant, landscape and so on.
 - B) Imaginary motifs engraved in the mind. Such patterns can be observed in many tiles.
 - C) Symmetrical geometric patterns that are produced using the science of symmetry.
 - D) Picture of imaginary shapes.
-

Geometric units in motifs can be seen in detail and specific types, and one who is familiar with the science of symmetry can observe a variety of symmetric laws in the form of specific geometric types in motifs. Because the knowledge of symmetry also governs the structure of atoms in crystals, it is concluded that symmetry also exists for components in invisible states.

In this study, it was shown that ancient designers performed geometric patterns based on experimental, complex and strenuous illustrations, along with "decoding" and were able to obtain the principles of symmetry in their work.

By observing the geometric patterns designed in the tiles, we established a relationship between the composition of the geometric units and the formation of a symmetric pattern that can be expanded in two dimensions. The two-dimensional growth and development of such designs can continue indefinitely. We adjusted the following formula based on the mixed geometric patterns and its expansion in two dimensions.

$$\sum uc + d \rightarrow gp$$

In this formula, uc (unit cell) means "geometric unit", d means "decoding" and gp means "geometric pattern" (fig 2).

Conclusion

Considering the adaptation of tiling patterns with the atomic structure of the crystalline material's network, (Tab.3) it is concluded that the origin of the knowledge of symmetry was due to the antiquity of symmetrical pattern products in Iran. Elements and operations of symmetry used by European Scientists H. Maguin and Schoenflies to establish the knowledge of symmetry to determine the atomic structure of crystals, and has also been used in geometric tile designs. In general, it was found that the knowledge of symmetry in the 19th century is harmonious with the symmetrical motifs of ancient Iranian designers and performers. On the other hand, considering the large number of designs that exist in ancient tiles, it can be claimed that most of the designed patterns in the world belong to ancient Iran. It is observed that in the texture of some tileworks, from the aggregation of the primary components, a larger complex unit is produced, so that the larger unit itself can be expanded the design. Based on the knowledge and contemplation of traditional architects, such cases were known as "unity and plurality", the concept of which has been discussed in the sciences of mysticism and wisdom [4].

Considering that the tile pieces of antiquity and BC were made and polished with the characteristics of that period and in different periods of history, the design and construction of patterns has gradually expanded, it is possible to determine the age of the discovered pieces, related to different time periods by preparation and utilization of evidence and standard tables and obtain useful archaeological information from them.



بررسی نقوش هندسی دوبعدی از نوع گره‌چینی و روش‌های دیگر رمزدار بر روی سطوح کاشی‌کاری‌های باستانی و تطبیق آن با نقوش شبکه‌های سه‌بعدی در آرایش‌یابی‌های اتم‌ها در مواد جامد بلورین

مهدی علوی*

استاد دانشکده شیمی دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۲۰

چکیده

هنر و فنون کاشی‌کاری رنگارنگ در گنبد‌ها، کتیبه‌ها، مناره‌های مساجد، بناها و آثار تاریخی به‌جامانده از دوران باستان، سند ارزشمند و مهمی در تزیینات معماری قدیمی ایران است. ریاضی‌دانان، طراحان و مجریان باستان، از روش‌های هندسی گره‌چینی، یزدی‌بندی، مقرنس و روش‌های دیگر، با استفاده از چیدمان هندسی توسط اشکال مربع، مربع مورب، لوزی و روش‌های دیگر نظیر «هم‌نسبتی مربع با دایره» با اصطلاح «ماندالا» استفاده کرده‌اند. شناسایی و تولید واحدهای اولیه نقوش «نقش‌مایه‌ها» از قرن‌ها پیش آغاز شده و شامل واحدهای هندسی در دو بعد است. این نقوش در دوران مختلف تاریخی، توسط هندسه‌دانان و طراحان تکامل یافته است. این موضوع، مشخص است که قوانین ریاضی - هندسی در همه دوران گذشته در نقوش ثابت باقی مانده‌اند. این بدان معنی است که قوانین قرینه‌سازی، دارای یک منشأ اصلی هستند، به‌طوری‌که در دوران مختلف تاریخی هم شکلی ثابت داشته‌اند. از طرفی هم‌ترازی، تعادل و تقارن، لازم و ملزوم یکدیگر هستند. هندسه در دوران باستان برای اندازه‌گیری سطوح ساختمان‌ها و زمین‌های کشاورزی مورد استفاده قرار گرفته است. در ترتیب نقش‌های منظم، از نقطه، پاره‌خط، زاویه، دایره، مربع و مثلث در تولید نقوش دوبعدی استفاده شده است. در این پژوهش، ضمن بررسی نقوش هندسی کاشی‌کاری‌های باستانی، با استفاده از روش‌های تصویری دوبعدی و تطبیق آن با دانش تقارنی مورد استفاده در ساختار مواد جامد کریستالین شامل نقش‌بندی اتم‌ها در شبکه سه‌بعدی و دوبعدی و تک‌بعدی اتم‌ها، مشخص شد که هر دو نوع آرایش‌یابی‌ها، از قوانین و دانش اصلی تقارنی پیروی می‌کنند. درحالی‌که اندازه طول سلول اولیه ساختار شبکه‌ای بلورها حدود چند انگسترم است، طول یک ضلع نقش‌مایه‌های هندسی در نقوش هندسی کاشی‌کاری، حدود ۱۰۱۰ برابر آن است؛ بنابراین، نتیجه‌گیری می‌شود که دانش تقارن برای اجزای بسیار ریز (نامرئی) و بسیار بزرگ، تحت شرایط ویژه برقرار است. در این راستا، علم تقارن می‌تواند در علوم دیگر نیز وجود داشته باشد و مورد بررسی و استفاده قرار بگیرد.

واژگان کلیدی: نقوش کاشی‌کاری، نقوش ساختارهای اتمی بلورها، تقارن، تطبیق نقوش تقارنی.

* نویسنده مسئول مکاتبات: اصفهان، میدان آزادی، دانشگاه اصفهان کدپستی: ۸۱۷۴۶۷۳۴۴۱

پست الکترونیکی: m.alavi@Sci.ui.ac.ir

۱. مقدمه

به‌طور کلی، هر نقش در کاشی‌کاری‌ها، دارای ویژگی‌های جالب است و در اصل، گروه نقوش را می‌توان به چهار نوع تقسیم‌بندی کرد:

- الف- تصویرسازی گونه‌هایی که در اطراف ما وجود دارند؛ نظیر یک منظره، گل و گیاه، تصویر انسان و حیوان و غیره.
- ب- نقش یک پدیده یا قانون.
- ج- تصویر اشکال تخیلی.
- د- تصویر نقوش هندسی تقارنی.

نقوش می‌توانند به‌صورت هندسی خالص و یا مخلوط با اشکال نامتقارن باشند. نقوش بررسی شده در این پژوهش، نقوش تقارنی هستند که با استفاده از روش‌های ویژه، ترسیم شده‌اند و بنابراین، به تطبیق نقوش هندسه با آرایش‌بایی‌های تقارنی توجه ویژه شده است.

در دوران باستان، هندسه و دانش ریاضی را با علوم عرفانی مرتبط می‌دانستند. «افلاطون» و بعداً «فیثاغورث»، به‌گونه‌ای رم‌ذار و عارفانه به این موضوع پرداختند، چراکه مفهوم هندسه را مسیری برای رسیدن به کمال می‌دانستند و عقیده داشتند هندسه، موجب تقویت فکر برای رسیدن به ساختار عالم است. همچنین دانش نقوش هندسی، وحدت را در نظم فضایی به وجود می‌آورد. بورکهارت تیتوس [1] گفته است که هر هنری، علم است و هر علمی، هنر. گفته شده است که هندسه علمی است که در هنر اسلامی، در بازتاب صور عالم خیال کاربرد دارد که با ماهیت تجویدی علوم هندسه و ریاضیات در ارتباط است.

کاشی‌کاری، دانش علوم تجربی و از هنرهای اصیل ایرانی است که نمونه‌های آن در بناها و اماکن مقدس شهرهای مختلف ایران وجود دارد. کاشی‌کاری به‌عنوان تزئینات زیبا و جذاب در عمارات شهر تهران، همچون عمارت شمس‌العماره و کاخ گلستان و بناهای قدیمی‌تر در شهرهای اصفهان، تبریز، یزد، مشهد و دیگر شهرهای ایران، به کار رفته است [2].

به نظر می‌رسد همسانی، تقارن، نظم و آرایش کاشی‌کاری، موردتوجه بینندگان است. همراهی رنگ-دانه‌های لعاب و کاشی‌کاری‌ها، موجب زیبایی سطوح ابنیه شده است [3].

ملاحظه می‌شود که در بافت برخی کارشی‌کاری‌ها، از تجمع اجزای اولیه، یک واحد کمپلکس بزرگ‌تر تولید می‌شود، به‌طوری‌که واحد بزرگ‌تر، خود می‌تواند به‌گونه‌ای در نقش گسترش یابد. بر اساس شناخت و اندیشه معماران سنتی، چنین مواردی را به‌عنوان رسیدن «وحدت به کثرت» و برعکس آن، «کثرت به وحدت» می‌دانستند که مفهوم آن در علوم عرفان و حکمت مورد بحث قرار گرفته است.

در سال ۱۹۱۲ م، با استفاده از پراش‌سنجی پرتو ایکس (XRD) توسط ماکس فن لاهه (Max von Laue) فیزیک‌دان آلمانی، تقارن در دانش بلورشناسی مورد استفاده قرار گرفت [4]. واژه‌های "عناصر تقارنی (Symmetry Elements) و عوامل تقارنی (Symmetry Operation)"، از اصلی‌ترین پایه‌های علم تقارن هستند که در نقوش هندسی کاشی‌کاری‌ها قابل تشخیص هستند. درحالی‌که طراحان نقوش کاشی‌کاری‌ها در دوران گذشته بر اساس دانش تقارنی نقوش هندسی را ترسیم کردند ولی در نقوش هندسی از آن‌ها نام نبرده‌اند و گزارشی در این مورد در دست نیست.

۲. تاریخچه

از هزاره دوم پیش از میلاد، خشت و آجرهای لعاب‌دار محتوی نقوش انسانی و حیوانی یافت شده است. در بررسی‌های باستان‌شناسی کاخ‌های تخت‌جمشید و شوش مربوط به زمان هخامنشیان، نیز نمونه‌هایی از هنر کاشی‌کاری و آجرهای لعاب‌دار مشاهده شده است. در دوران سلجوقی، کاشی‌کاری بسیار گسترش یافت. قطعات کاشی متعلق به آن زمان شاهد این موضوع است. دوره ایلخانی را می‌توان فعال‌ترین دوره کاشی‌کاری دانست. ابوالقاسم عبدالله بن محمد، مورخ دربار ایلخانی و یکی از نوادگان خانواده مشهور سفالگر

۳. سن‌شناسی

تاریخچه و سبک‌های کاشی‌کاری دوران گذشته، از جمله انواع الگوها، نقش‌مایه‌ها، ویژگی‌های دوران در ساخت‌وساز، دانش هندسه ترسیمی، مقایسه و تطبیق شکل‌ها در مکان‌های مختلف، نام‌گذاری زمینه قاب، شکل‌گیری، ساخت‌وساز بدنه و غیره، امکان تشخیص تاریخ و سن‌شناسی کاشی‌کاری‌ها به‌ویژه قطعات کشف‌شده در حفاری‌های باستانی را ممکن می‌سازد. سن‌شناسی، با استفاده از جدول‌های شاهد و استانداردهای تهیه‌شده و تطبیق با دوره تاریخی انجام می‌شود. با کاوش‌های باستان‌شناسی از نمونه‌های کاشی در شهر سامرا پایتخت حکومت عباسیان، بخشی از تاریخچه کاشی‌های لعاب‌دار مربعی شکل و چندرنگی مربوط به دوران ۸۸۶-۸۸۳ ه. ق. تخمین زده شده است. در یک حفاری در شوش، کاشی‌هایی مربوط به دوره هخامنشیان متعلق به ۴۰۰ سال قبل از میلاد به دست آمده است. نمونه‌هایی از کاشی‌های پیداشده در حفاری‌ها، در موزه‌های جهان در معرض دید عموم قرار دارند. آثاری از هنر کاشی‌کاری، نشان‌دهنده دوران خاصی از تاریخ هستند.

تزئینات در قرن هشتم هجری توسعه یافت. تا اوایل قرن دوازدهم هجری، روش‌های تولید به طریق باستانی ادامه داشت و نقوش گل و گیاه و بوته و کاشی هفت‌رنگ ویژه مساجد و اشکال هندسی در این دوره موردتوجه قرار گرفت و در اکثر بناها به کار گرفته شد. در شوش و تخت جمشید، آجرهای منقوش و ترکیبی از آن‌ها، متعلق به زمان هخامنشیان یافت شده‌اند.

نمونه‌هایی در شوش با نام‌های «تیران و شیران» کشف شده است. بر روی بدنه‌های ساخته‌شده از گل و گچ پخته‌شده در کوره، نقوش تزئینی مشاهده شده‌اند. بر روی کاشی‌کاری‌های دوره هخامنشیان، رنگ‌های زرد، سبز و قهوه‌ای دیده می‌شوند.

در دوران اسلامی، عنصر اصلی تزئینات کاشی‌کاری بر مبنای هندسه و نقوش انتزاعی بوده است. نقوش تزئینی در چند گروه اصلی شامل: نقوش هندسی (گره)، کتیبه‌ها با خطوط تزئینی، نقوش گیاهی، نقوش حیوانی

کاشان به نام «ابوطاهر»، توضیحاتی در مورد برخی روش‌های تولید کاشی نگاشته است [5]. در دوران اسلامی، از کاشی‌کاری‌ها اکثراً در مساجد و مدارس استفاده می‌شد. در سده‌های اول دوران اسلامی، تزئینات کاشی‌کاری با رنگ فیروزه‌ای و لاجوردی، در کنار آجرهای بدون لعاب قرار گرفت و از آن، برای تزئین بخش‌هایی از قسمت فوقانی مناره‌ها استفاده شد. در آن زمان، تزئینات شامل گل‌وبوته به‌صورت متقارن در بستر نیز متداول شد. روند پیشرفت کاشی‌کاری موجب شد که سبک‌های متفاوتی در تکنیک کاشی به وجود آید. کاشی معرق، استفاده از رنگ‌های متفاوت گونه‌ها به سبک موزاییک‌سازی بود. کاشی‌کاری تا دوران قاجار ادامه داشت و از آن دوره به بعد تنزل یافت [6].

با استفاده از خشت‌های کاشی‌های تک‌رنگ دوران پیش از اسلام و آمیختن رنگ‌های متنوع، کاشی هفت‌رنگ به دست آمد. از آنجایی که زیبایی و استحکام تزئینات کاشی‌کاری موردتوجه عموم قرار گرفت، کاشی‌کاری به میزان قابل‌توجهی افزایش یافت، به‌طوری‌که شاه‌عباس شخصاً بر ساخت‌وساز کاشی‌کاری‌ها نظارت می‌کرد. الگوی کاشی‌کاری‌های هفت‌رنگ، به‌واسطه سادگی ساخت‌وساز تقویت شد. در آن دوره، خاورمیانه مرکز تولید نقوش بود و کاشی‌کاری به‌عنوان یک دانش، موردتوجه قرار گرفت و در نتیجه، ساخت‌وساز کاشی و کاشی‌کاری توسعه یافت؛ به‌گونه‌ای که فنون کاشی‌کاری به کشورهای دیگر از جمله اسپانیا نیز راه پیدا کرد [7].

در دوران مختلف تاریخی، تولیدات کاشی و کاشی‌کاری شامل تهیه مواد اولیه و بستر بدنه کاشی نقوش و رنگ‌آمیزی، نیازمند استفاده از علوم تجربی، فنی و هنری بوده است. پیشرفت علوم، تاحدی مربوط به دوران مختلف تاریخی می‌شود، بنابراین، این علوم نشان‌دهنده کیفیت و سیستم کاشی‌کاری هستند. شکل ۱، علوم تجربی، فنی و هنری مورد استفاده در کاشی و کاشی‌کاری را نشان می‌دهد.

و نقوش انسانی تقسیم‌بندی می‌شوند. با تحقیق در درون نقوش کاشی‌کاری‌های موجود در بناهای مزین به کاشی‌کاری، می‌توان سن‌شناسی انجام داد [8].

۱. تاریخ، فرهنگ و هنر:

انتخاب الگوها در ارتباط با فرهنگ و هنر تاریخی، انتخاب با استفاده از مشاهده فیزیکی قطعات.



۲. علم مواد:

کانی‌شناسی و خاک‌شناسی مواد در تولید کاشی، دانش رنگ‌دانه‌ها، تغییر رنگ رنگ‌دانه‌ها قبل و بعد از پخت، ترمودینامیک تشکیل فازها، شرایط پخت و دما دهی.

۴. طراحی، الگوهای تقارنی:

آفرینش و طراحی الگوها، دانش تقارن و انتخاب اشکال هندسی معنی‌دار، نقص‌ها و زبانی‌ها طرح‌ها در قطعات.

۳. دانش فنی تولید:

پروژه‌های تهیه مواد اولیه بدنه و لعاب، آماده‌سازی مواد، دانه‌بندی، ورزدهی، تشکیل لایه‌های زیری و رویی لعاب، فن حرارت‌دهی، آنالیز مواد، درجه خلوص و مرغوبیت.

شکل ۱: علمی که در ساخت‌وساز کاشی‌کاری‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند

Fig. 1: The sciences used in the construction of tiles

1. History, Culture and Art: Selection of Patterns in Relation to Historical Culture and Art, Selection Using Physical Observation of Parts
2. Materials Science: Mineralogy and soil science in tile production, knowledge of pigments, discoloration of pigments before and after curing, thermodynamics of phase formation, curing conditions and firing.
3. Production technical knowledge: Processes of preparation of raw materials for the body and glaze, preparation of materials, granulation, training, formation of the lower and upper layers of the glaze, heating technique, analysis of materials, purity and quality.
4. Design, symmetric patterns: Creation and design of patterns, knowledge of symmetry and selection of meaningful geometric shapes, defects and expressive language of designs in parts

۴. رنگ‌دانه و لعاب

در دوران باستان، استفاده از رنگ‌دانه‌ها در کاشی‌کاری‌ها به‌منظور درخشش و تزئین، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است. در آن زمان، از اکسیدهای معدنی به علت پایداری در مقابل عوامل طبیعی نظیر برف، باران و باد استفاده شده است [9]. شناسایی معادن رنگ‌دانه‌های طبیعی و پایدار، خالص‌سازی و فرآوری شامل میکرونیزه کردن به‌گونه‌ای ماهرانه با استفاده از

روش‌های ساده و امکانات اندک آن زمان، شگفت‌انگیز است. کارهای فنی و عملی انجام‌گرفته در آن زمان برای تولید، درحال حاضر امکان‌پذیر نیست. روش‌ها به‌گونه‌ای تجربی، نسل‌به‌نسل آموزش داده می‌شدند. متأسفانه نوشته‌هایی در مورد تکنیک لعاب‌سازی و لعاب‌دهی و رمز کار تهیه و خالص‌سازی و پخت‌وپز در کوره‌های بدون دماسنج آن زمان، وجود ندارد. جدول ۱ شامل لیست تعدادی از لعاب‌های پایدار، با مقدار درصد لعاب قلیایی سرب و قلع آن‌ها است.

می‌شده است. با استفاده از تکرار و گسترش نقش‌مایه‌ها، نقش موردنظر را تولید می‌کردند. عناصر اصلی ترسیم شامل نقطه، خطوط شکسته و منحنی، پاره‌خط و زاویه و نقوش اصلی هندسی شامل مربع، مثلث و دایره بود. در مورد وفور و چگونگی نقوش هندسی، نوشتارهایی در دست نیست. معمولاً از اصطلاح «رمزشناسی» در طراحی و تولید صحبت شده است. در آن زمان، اکثراً نقوش هندسی در داخل یک مربع و یا شش ضلعی محدود می‌شدند و به‌گونه‌ای ماهرانه تزئین و سپس در دو بعد تکرار می‌شدند تا اینکه الگوی اصلی به دست می‌آمد. در آن زمان، الگوهای هندسی از نظر زیبایی‌شناسی، امتیاز داشت و به‌دست‌آوردن نقوش هندسی را حاصل استفاده از پیچیده‌ترین فرمول‌های ریاضی توسط هنرمندان بی‌نام می‌دانستند.

جدول ۱: مقادیر قلیائی سرب و قلع

Table 1: Alkaline amounts of lead and tin

30-25%	سرب اکسید Lead oxide
55-40%	سلیس Smooth
14-8%	سودا Soda
7-4%	قلع سفید Tin oxide

۵. تجمع تک‌واحدهای هندسی و تشکیل نقش هندسی

در دوران باستان، طراحی و تولید نقوش هندسی که اهل فن، مهم‌ترین انواع آن را «گره» می‌نامیدند، با استفاده از خطوط راست پایه‌ریزی شد. توسط «نقش‌مایه‌های» گره، نقش موردنظر را ترسیم می‌کردند. از گره، به‌ویژه در دوران سلجوقیان استفاده

جدول ۲: آثار پنداشت معماران در مورد سه نقش اصلی در طراحی

Table 2: The effects of architects' perception of the three main roles in design

ساده‌ترین شکل، مثلث است که نشانگر سه عالم است The simplest shape is a triangle that represents three worlds	△
از مهم‌ترین اشکال و نشان‌دهنده استحکام، استقرار و کمال است One of the most important forms and indicators of strength, establishment, and perfection	□
از مهم‌ترین شکل‌ها و نمایان‌گر حجم‌های کروی و حرکت اجرام آسمانی است It is one of the most important shapes and represents the spherical volumes and motion of celestial bodies	○

نقش‌مایه‌های ظاهرشده در الگوهای هندسی تصویرشده توسط طراحان ملاحظه شده است.

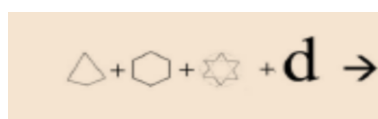
$$\sum uc + d \rightarrow gp$$

در این فرمول uc به معنای واحد هندسی (unit cell) d، به معنای رمزگشایی (decoding) و gp به معنای الگوی هندسی (geometrical pattern) در نظر گرفته شده است.

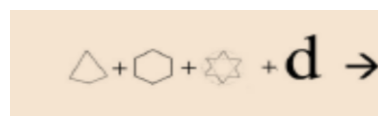
با استفاده از فرمول رمزدار ترکیب نقش‌مایه‌های هندسی و تولید یک نقش ترکیبی هندسی، نقوش شکل ۲ ترسیم شده‌اند.

در اماکن مقدس و بناهای مزین به کاشی‌کاری در شهرها و دوران مختلف، مجریان متفاوت، نقوش یکسان تولید کرده‌اند. این موضوع نشان‌دهنده آن است که در طراحی نقوش هندسی، دانش ریاضی و تقارن حاکم است و در نتیجه الگوهای یکسان، دارای یک نوع فرمول تقارنی هستند.

با توجه به مطالب ذکرشده در بالا، ما رابطه زیر را در چیدمان نقش‌مایه‌های هندسی تنظیم کردیم. اعتبار فرمول، در به اشتراک‌گذاری کلیه اضلاع در گسترش دوبعدی و تشکیل یک الگو با به‌کارگیری رموز شکل‌گیری و تشکیل الگوی هندسی گسترده‌تر و قابل توسعه در دو بعد است. در این فرمول، صرفاً



۱. مسجد گوهرشاد دوران تیموری



۲. مسجد تبریزی‌ها در کاشان

شکل ۲: مجموع واحدهای هندسی همراه با رمزگشایی (d) و نقش کلی

Fig. 2: Total geometric units with decoding (d) and the main figure.

1. Goharshad Mosque of the Timurid period

2. Tabrizi Mosque in Kashan

۶. شکل‌گیری تقارنی در نقوش هندسی کاشی و بلورها

در زمان‌های باستان، بشر با شکل‌گیری بلورها، گل‌ها، کندوهای عسل و دیگر اشکال منظم در طبیعت آشنا بود و این الگوها را در آثار هنری مورد استفاده قرار می‌داد. دانشمند معروف، جیمز نیومن (James Newman) تقارن را در بسیاری از پدیده‌ها، نظریه‌ها، ساختار فضا، فیزیک کوانتم و دانه‌های برف و غیره تشخیص داد. ارسطو تقارن را حد نهایی تناسب دانسته و فیثاغورث تقارن را به عرفان ربط داده و گفته است که تقارن موجب وحدت با خداوند می‌شود. گفته‌اند خداوند مظهر وحدت و جهان، مظهر کثرت است. بنا بر نظر ارسطو، فلسفه و عقیده فیثاغورثیان این بود که اصل کلیه اشیا و ساختار عالم هستی، حاصل اعداد و روابط بین اعداد است.

در سال ۱۷۸۳م، دانشمند فرانسوی Rome de lisle، تساوی زوایای بلورهای طبیعی (قانون ثابت بودن زوایا) را کشف کرد. بعداً آقای هوی (Hoy) گفت بلورها از مولکول‌های چندوجهی شکل گرفته‌اند [10]. در ۱۸۱۹ میلادی، میچرلیش (Mitscherlich) پدیده هم‌شکلی بلورها (isomorphism) را کشف کرد [11].

در جدول ۳ نمونه‌های کاشی‌کاری مناطق مختلف، مورد بررسی تقارنی قرار گرفته‌اند. در این جدول از روش تصویری، نقش‌های زمینه‌ای مربع، مربع مورب و لوزی استفاده شده است [12]. نام نقش‌مایه‌های مورد نظر در کاشی‌کاری، در جدول آورده شده و با بررسی عناصر و

عوامل تقارنی، نوع محورهای تقارنی و صفحات تقارنی به‌وجودآورنده نقش، تعیین شده و در نتیجه فرمول تخمینی تقارنی برای هر نقش آورده شده است. در جدول ۳، محورهای دورانی C_1 ، C_2 و C_6 و صفحات تقارنی v بر اساس شوین فلیس (Schoenflies) تنظیم شده است. v ، صفحه عمود بر سطح کاغذ در نظر گرفته شده است [13].

در قرن ۱۹ میلادی، دانش تقارن به‌عنوان اساس سنجش‌های تعیین ساختارهای اتمی در مواد جامد کریستالین مورد استفاده قرار گرفت. با کشف پرتو ایکس، آقای ماکس فن لاهه (Max van Laue) فیزیکدان با تابش باریکه پرتو X بر کریستال و استفاده از قواعد پراش سنجی پرتو ایکس (XRD)، تعیین ساختار مواد جامد بلوری متشکل از اتم، یون و مولکول‌ها را پایه‌ریزی کرد. در نتیجه، تحول شگرفی در علم شیمی پدیدار شد [14]. از آنجا که طراحان نقوش کاشی‌کاری‌ها از قرن‌ها پیش با استفاده از طراحی‌های نقوش هندسی و قرینه‌سازی، به‌نوعی با آثار تقارنی نقوش و قوانین آن آشنا بودند و از طرفی در اروپا به منظور کاربرد تقارن در تعیین ساختار اتمی مواد در بلورها، دانش تقارن را گسترش دادند. در ابتدا واژه‌های «عناصر و عوامل تقارنی» مورد استفاده قرار گرفت. سپس هفت سیستم تقارنی برحسب زوایا و ۳۲ گروه تقارنی پایه‌ریزی شدند.

در این پژوهش، پس از بررسی‌های مقایسه‌ای متوجه شدیم که دانش تقارنی سه‌بعدی آرایش‌یابی‌های اتمی،

یک عنصر فرضی است که یک عضو و یا حالت توسط این عنصر قرینه‌سازی می‌شود. جدول ۴ عناصر تقارنی ساده با زوایای ۱۸۰ درجه (C_2)، ۱۲۰ درجه (C_3)، ۹۰ درجه (C_4) و بالاخره ۶۰ درجه (C_6)، محورهای دورانی را نشان می‌دهد.

قابل تطبیق با نقوش هندسی کاشی‌کاری‌ها هستند. در این مقاله، به‌منظور تطبیق دانش تقارن و روش‌های هندسی نقوش کاشی‌کاری، یافته‌های مقایسه‌ای بررسی شدند. در دانش تقارن، عمل تقارن، یک عملی است که توسط عنصر تقارنی رخ می‌دهد. عنصر تقارنی،

جدول ۳: نقوش کاشی‌کاری‌های هندسی
Table 3: Patterns of geometric tiles

نقش بر اساس طراحی زمینه‌ای لوزی Role based on rhombus background design		نقش با استفاده از زمینه مربع مورب Role using diagonal square background			نقش زمینه با استفاده از شطرنج مربع Role play using square chess		
							نقوش Sample designs
مقبره زین‌الدین تابادی Tomb of Zainuddin Tabadi	مسجد جامع یزد؛ قدمت ۸۰۰ ساله Yazd Grand Mosque; 800 years old	مسجد شاه؛ مشهد؛ سده ۹ ه. ق. Shah Mosque; Mashhad;	مسجد جامع یزد Yazd Grand Mosque	مدرسه چهارباغ اصفهان Isfahan Chaharba gh School	دیوار خارجی مقبره آقا؛ تهران The outer wall of the tomb of the gentleman; Tehran	بارگاه امام رضا (ع)؛ مشهد مقدس Imam Reza (AS) Court; holy Mashhad	محل Location
شش و تکه six and piece	شش six	موج Wave	طبل پیلی Drum Pili	پیلی و مربع Pili and square	موج و سُلّی Wave and wave	طبل در طبل Drum in drum	نام نقش Role name
یک نوع درجه ۶؛ یک نوع درجه سه A type of grade 6; A kind of third degree	یک نوع درجه ۶؛ سطح تقارنی A type of grade 6; Symmetric level	دو نوع درجه ۲؛ یک سطح تقارنی Two types of grade 2; A symmetric level	دو نوع درجه ۲؛ دو نوع سطح عمودی Two types of grade 2; Two types of vertical surfaces	دو نوع محور درجه ۴ Two types of 4th degree axes	دو نوع درجه چهار؛ یک نوع درجه ۲؛ دو سطح عمودی Two types of fourth degree; A type of grade 2; Two vertical levels	دو نوع عمود بر هم؛ یک نوع درجه ۲ Two types perpendicu lar to each other; A type of grade 2	نوع عناصر تقارنی Type of symmetric elements
C_6C_3	C_6	C_{2v}	C_{2v}	C_4	C_{2v}	C_{2v}	فرم تقارنی Symmetric form

Schoenflies جدول ۴: عنصرهای تقارنی هرمن موگان،

Table 4: Symmetric Elements Herman Mogan, Schoenflies

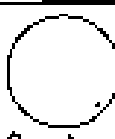
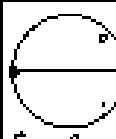
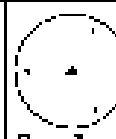
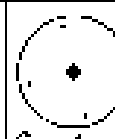
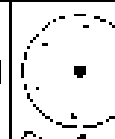
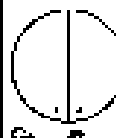
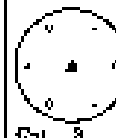
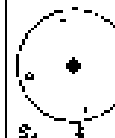
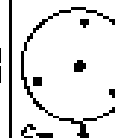
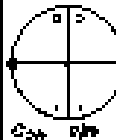
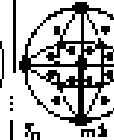
عنصر تقارنی Symmetric element	سطح بازتاب Reflection level		درجه دو دوجهی grade two Two-sided	درجه سه سه وجهی Grade three Three-faced	درجه چهار چهاروجهی Grade four Tetrahedron	درجه شش شش وجهی Grade six Hexagonal
	افقی Horizontal	عمود Vertical				
علامت ترسیمی Drawing mark	—		()	▲	■	●
علامت گروه Group mark	δh	δv	C2	C3	C4	C6

قطب جنوب، سطح استوای گره را در نقاطی قطع می‌کنند. نقاط به‌دست‌آمده، نمایانگر سطوح سلول بلور در صفحه استوایی گره است. بدین ترتیب صفحات جانبی بلور، به‌صورت نقطه در سطح استوایی دوبعدی ظاهر می‌شود [15]. توسط تصاویر استروگرام و مقایسه آن با نقوش هندسی کاشی‌کاری، وجود دانش تقارن در هر دو روش تصویر نقوش بر کاشی‌کاری‌ها و تعیین ساختار اتم‌ها در بلورها مشخص می‌شود. شکل ۵ تصاویر استروگرام را نشان می‌دهد.

تصاویر استروگرام (Stereogram) به‌منظور نشان دادن ساختار صفحات تقارنی بلور، به کار گرفته شد. در این تصاویر، از مرکز یک کره مفروض که با مرکز سلول بلور منطبق است، عمودهایی بر سطوح جانبی سلول ترسیم می‌شود. خطوط عمود بر سطوح سلول، ادامه داده می‌شود تا گره مفروض را قطع کند. محل برخورد عمودها بر سطح گره، به صورت نقطه نمایان می‌شود. سپس کلیه نقاط به‌دست‌آمده بر روی سطح گره را به قطب جنوب گره متصل می‌کنند. خطوط وصل‌شده به

جدول ۵: استروگرام صفحات و محورهاى تقارنى [15]

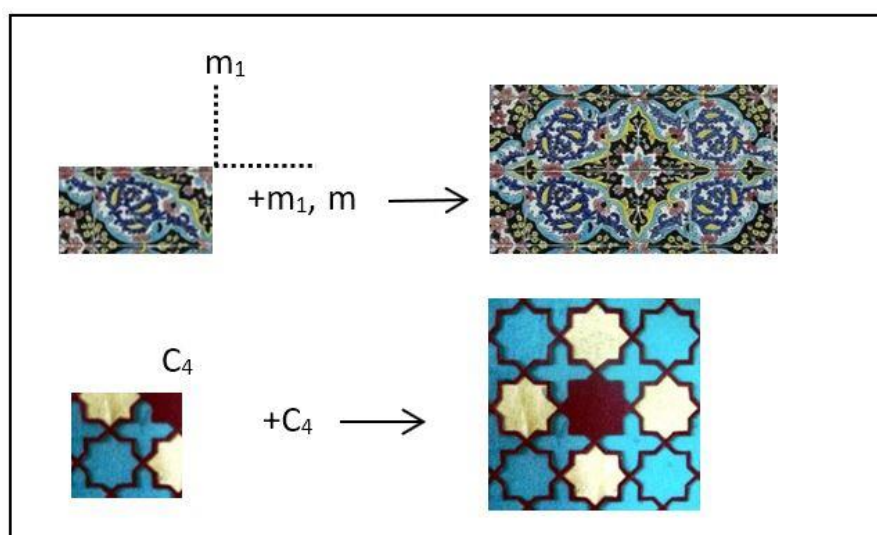
Table 5: Estrogram of symmetric plates and axes [15]

Rectangular	Monoclinic / Orthorhombic	Tetragonal	Tetragonal	Hexagonal	Cubic
					
C_2	C_2	C_4	C_4	C_6	C_4
					
C_2	C_2	C_4	C_4	C_6	
					
	C_2		C_4	C_6	C_4

شکل ۳، تکثیر یک‌چهارم نقش توسط دو عنصر تقارنی عمود بر هم و تکثیر یک‌چهارم نقش توسط محور چرخشی درجه چهار (C_4) را در کاشی‌کاری ایرانی نشان می‌دهد.

این تصویر به منظور استفاده در تطبیق با نقوش کاشی‌کاری با ساختار اتم‌های یک بلور می‌تواند به کار گرفته شود.

عناصر و عوامل تقارنی را می‌توان در کلیه نقوش هندسی ملاحظه کرد و مورد استفاده قرار داد.



شکل ۳: کاربرد عناصر و عوامل تقارنی در دو نوع نقش کاشی کاری همسان متقارن
Fig. 3: Application of symmetrical elements and factors in two types of identical symmetrical tiling roles

با مربع مورب و تولید «شمسه چهار مداخل»، ترکیب
لوزی با مستطیل و تولید «موج» و ترکیب مثلث با یک
مثلث وارونه کُند و تولید «ترنج» نشان داده شده است.

جدول ۶، ترکیب نقوش هندسی توسط ادغام
نقش مایه‌های هندسی ساده را نشان می‌دهد. در این
جدول، ترکیب مثلث با یک مثلث وارونه با اندازه ۱۸۰
درجه دوران و تولید «شمسه سه مداخل»، ترکیب مربع

جدول ۶: ترکیب واحدهای هندسی ساده و تولید واحدهای هندسی ترکیبی
Table 6: Combination of simple geometric units and production of combined geometric units

واحد	واحد	ترکیب
مثلث	مثلث وارون	شمسه سه مداخل
مربع	مربع چرخان ۴۵°	شمسه چهار مداخل
لوزی	مستطیل	موج
سه گوش تند	سه گوش کند وارون	ترنج

در نظر گرفته شده‌اند، در نتیجه علامت‌های گروه تقارنی کاشی‌کاری‌های مورد بررسی در جدول تدوین شده است، این مورد نیز نشان‌دهندهٔ تطبیق دانش تقارن در نقوش کاشی‌کاری‌ها با نقوش ساختار اتم‌ها در بلورها است.

از تطبیق اجمالی اشکال هندسی در کاشی‌کاری‌ها [16] و اشکال ساختار اتمی در بلورها، نتیجه‌گیری می‌شود که دانش تقارن در هر دو مورد و احتمالاً در موارد دیگر، به‌عنوان یک اصل هندسه ریاضی به‌طور مستقل به کار رفته است. اشکال جدول ۷، به‌کارگیری عناصر و عوامل تقارنی که با استفاده از علامت‌گذاری هرمن موگان (Herman Mauguin) و شوین فلیس (Schonflies) در قرن ۱۹ میلادی به‌عنوان پایه‌ریزی دانش تقارن در تعیین ساختار اتمی مواد در جامدات کریستالین تدوین شده‌اند را نشان می‌دهد [17,18].

جدول ۷، نشان‌دهندهٔ واحدهای هندسی طراحان باستانی در دو بُعد بر روی کاشی‌کاری‌های باستانی با استفاده از روش‌های هندسی ترسیمی است. چیدمان‌های منظم و بدیع، به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که واحدها در دو بُعد بتوانند گسترش بیابند. طراحان باستانی، موفق به چیدمان‌های منظم اصول دانش تقارن شدند و بیش از ۵۰ واحد هندسی در دو بُعد قابل گسترش تنظیم کردند.

«عناصر و عوامل تقارنی» مورد استفاده در ساختارهای اتمی در بلورها را می‌توان در نقوش هندسی کاشی‌کاری‌ها جستجو کرد. در جدول ۷ عناصر و عوامل تقارنی در نقوش، قابل شناسائی هستند و با استفاده از علامت‌گذاری‌های محورها و سطوح تقارنی می‌توان نوع گروه تقارنی را شناسائی کرد، در جدول شماره ۷ سطوح تقارنی به‌گونه‌ای عمود بر سطح کاغذ

جدول ۷: واحدهای هندسی جمع‌آوری‌شده در نقوش کاشی‌کاری‌های باستانی [19]
Table 7: The Elementary Units of Geometrical Design of Iranian Ancient Ceramic and Kashi

No	The Name of Unit	Shape of Geometrical Unit	Symmetric al Symbol
1	Triangle		C_3
2	Square		C_4
3	(Sabunak) Diagonal Square		C_4
4	Lozenge (Tokhmeh)		C_2
5	Narrow tail Bergamot		δ_v
6	Wide tail Bergamot		δ_v
7	Butterfly		δ_v
8	Pentagon		C_5
9	Wide Pentane star		C_{5v}
10	Narrow Pentane star		C_{5v}
11	Wide seat Pentane patulous		δ_v
12	Pannier		δ_v
13	Hexagon		C_6
14	Wide tail Hexagonal		δ_v
15	Narrow tail Hexagonal		δ_v
16	Jug (Barsni)		C_{2v}
17	Pinnacle		δ_v
18	Espadrille		δ_v
19	Concave tow-bale		C_{2v}
20	Convex two-bale		δ_v
21	Firecracker		δ_v
22.a	Raven		δ_v
22.b	Coach		δ_v
23	(Pili)		C_4
24	Wave		C_{2v}
25	Asian Wave		C_v
26	Doll		δ_v

No	The Name of Unit	Shape of Geometrical Unit	Symmetric al Symbol
27	Octagon		C_{4v}
28	Tetra bale		C_{4v}
29	Drum		C_{2v}
30	Wing Tetra bale		C_4
31	Narrow Grain		δ_v
32	Shuttle		C_{2v}
33	Collyrium		C_{2v}
34	Cross		C_{4v}
35	Four Headed pannier (Four Armlet)		C_{4v}
36	Plane tree-leaf nery		δ_v
37	Venus		δ_v
38	Intervention		δ_v
Sunshine Group			
39	(Liliaceous Ornamental) Intervention Ornamental triangle		C_{3v}
40	Intervention Square Ornamental		C_{4v}
41	Half Square Ornamental		δ_v
42	Quarter Square Ornamental		δ_d
43	Narrow Hexapetalous		C_{6v}
44	Wide Hexapetalous		C_{6v}
45	Wide Octapetalous		C_{4d}
46	Wide ninepetalous		C_{3d}
47	Wide decapetalous		C_{5v}
48	Wide Seat decapetalous		δ_v
49	Wide dodecapetalous		$C_{4\delta d}$
50	Narrow dodecapetalous		$C_{4\delta d}$

۷. نتیجه‌گیری

۱) با در نظر گرفتن آنکه قطعات کاشی دوران باستانی و قبل از میلاد، با ویژگی‌های آن دوران ساخته و پرداخته شده‌اند و در دوران مختلف تاریخ، طراحی و ساخت نقوش به تدریج گسترش یافته، می‌توان با تهیه و استفاده از جدول‌های شاهد و استاندارد، قطعات کشف‌شده مربوط به دوران مختلف را سن‌شناسی تاریخی کرد و از آن‌ها اطلاعات مفید باستان‌شناسی به دست آورد.

۲) در کاشی‌کاری، هر نقش معنا و مفهوم ویژه‌ای دارد. با یک بررسی اجمالی می‌توان منشأ نقوش به کاررفته در کاشی‌ها را به سه گروه اصلی تقسیم‌بندی کرد: الف) نقوش از اشیا و اجسام که در اطراف، موجود و قابل‌رؤیت هستند؛ مانند انسان، حیوان، گیاه، منظره و غیره.

ب) نقوش تخیلی که در ذهن نقش‌بندی شده‌اند. چنین نقوشی را می‌توان در بسیاری از کاشی‌کاری‌ها مشاهده کرد.

ج) نقوش هندسی تقارنی که با استفاده از دانش تقارن تولید می‌شوند.

واحدهای هندسی در نقوش، به صورت جزئی و گونه‌های اختصاصی قابل‌مشاهده هستند و کسی که با دانش تقارن آشنایی داشته باشد می‌تواند انواع قوانین تقارنی را به شکل گونه‌های مشخص هندسی در نقوش

مشاهده کند. دانش تقارن چون در تعیین ساختار اتم‌ها در بلورها نیز حاکم است، بنابراین نتیجه می‌شود که تقارن در حالت‌های نامرئی نیز برای اجزاء بسیار ریز نظیر اتم‌ها در ساختار شبکه‌ای، برقرار است.

۳) در این پژوهش نشان داده شد که طراحان باستانی، نقوش هندسی را بر اساس ترسیم‌های تجربی، پیچیده و دشوار، همراه با «رمزگشایی» اجرا می‌کردند و توانسته بودند اصول تقارن را در تلاش‌های ترسیمی و تفکری کارهای خود به دست آورند. با توجه به تطبیق نقوش کاشی‌کاری با ساختار اتمی شبکه مواد بلوری، نتیجه‌گیری می‌شود که منشأ دانش تقارن به علت قدمت تولیدات نقوش تقارنی در ایران بوده است. عناصر و عوامل تقارنی که توسط دانشمندان اروپائی از جمله هرمن موگان و شوین فلیس به منظور پایه‌ریزی دانش تقارن جهت تعیین ساختار اتمی بلورها، مورد استفاده قرار گرفته است، در نقوش هندسی کاشی‌کاری نیز می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. به طور کلی، مشخص شد که تناسب دانش تقارن قرن ۱۹ میلادی با نقوش تقارنی طراحان و مجریان ایرانی دوره باستان، برقرار است. از طرفی با در نظر گرفتن تعداد زیاد نقوشی که در کاشی‌کاری‌های باستانی وجود دارد، می‌توان ادعا کرد که بیشترین الگوهای نقوش طراحی‌شده در جهان، متعلق به ایران باستان است.

References

- [1] Bookhart Titus. Traditional cosmology. Returned by Hassan Azarkar. Tehran. Wisdom. Published 2010. [in Persian]
[بورکهارت تیتوس. جهان‌شناسی سنتی. برگردان حسن آذرکار. تهران: حکمت؛ چاپ اول ۱۳۸۹.]
- [2] Rajabnia Massoud. Islamic Art. Tehran. Radio and Television of the Islamic Republic of Iran. Second Edition 2015. [in Persian]
[رجب‌نیا مسعود. هنر اسلامی. تهران: صدا و سیما؛ جمهوری اسلامی ایران: چاپ دوم ۱۳۹۳.]

- [3] Pope A. Masterpieces of Persian Art. Eric Schroeder. Dryden Press; 1945.
- [4] Laue, Max von Ann. phys. (Berlin) 524, No.5.A83-A85.2012.
- [5] Sackler. Arthur, M. A New Look at ancient Iranian Ceramics Mc Clung Museum, <http://www.Sakler.Org> 1984.
- [6] Andrew J. Safavied Iran: Rebirth of a Persian Empire. Tauris; 2006.
- [7] Wit and wine: A New Look at Ancient Iranian Ceramics from the Arthur M. Sackler Foundation, Org. by: Berkshire Museum 39 Pittsfiel 2005.

- [8] Mollers D. Der Islamische Einfluss auf Glass und keramik in Asia. No.4. London; 1992. [in Germany]
- [9] Rhodes, Daniel, Clay and Glazes for pottery. Radnor. Pa: Chilton Book company 1973.
- [10] Rome'de l'Isle: Crystallographie, Seconde Edition. 4 vols; 1983.
- [11] Wells A. F. Structure Inorganic Chemistry 5th ed. Oxford University press; 1984.
- [12] Ghodsi Yazdi Faezeh. Geometry of designs 2. Tehran: Office of Educational Publishing supervision; 2006. [in Persian]
[قدسی یزدی فایزه. هندسه نقوش ۲. تهران: اداره نظارت بر نشر آموزشی، ۱۳۸۵]
- [13] Soller, W. Logical Symbols for Point Symmetry Groups. American Mineralogist 19(a)412. 1934.
- [14] Ewald, Ann. Phys. Berlin 44.257-282 1914.
- [15] Holt, R. and Winston. Crystallography and Crystalchemistry. Stereographic Projection. F.D. 1971.
- [16] Maher al Naqsh Mahmoud. Design and execution of roles in Iranian tiles. Abbasi Museum, fifth period; 1993. [in Persian]
[ماهر النقش محمود. طرح و اجرا نقش در کاشی‌کاری های ایران. موزه عباسی، دوره پنجم؛ ۱۳۶۲]
- [17] Schoenflies, A. Krystalsystem and kristalstruktural verlag B.C. Leipsig; 1891. [in Germany]
- [18] Sands D E. Crystal System and Geometry. Introduction to Crystallography- Min. Newyork: Dover, publication Inc. 54. 1993.
- [19] Alavi M. Kashis Serching for Attent with the Research to the Ancient Iran. Sience and Tech. Iran: Jahad Daneshgahi. 98. 2011. [in Persian]
[علوی. مهدی. کاشی: در جستجوی دستیابی به علوم و فنون گم‌شده و هنرهای فراموش‌شده ایران باستان. جهاد دانشگاهی واحد اصفهان. ۱۳۹۲]