ournal of Research on Archaeometry, 2021; 7 (1): 253-265

Journal of Research on Archaeometry

DOI: 10.29252/jra.7.1.253 URL: https://jra-tabriziau.ir/

Original Paper

Investigating Numerical Sequences in Decagona Geometric Ornamentation

Majid Heydari Delgarm[1]*, Mahdi Barqzadegan[2],

[1]. Assistant Professor, Department of Architecture, Bu-Ali Sina University, Hamedan, IRAN

[2]. M.A. in Architecture, Islamic Azad University, Hamedan Branch, IRAN

Received: 29/04/2021 **Accepted: 21/08/2021**

Abstract

This paper aims to introduce a previously unknown feature of a family of girih designs. This research is seeking to answer the question that "With what mathematical pattern does subdividing girih goes on?" Results show that in repeatedly subdividing girih, by maintaining the size of the polygons, frames grows in a sequence with properties of a generalization of Fibonacci. Some real-world samples, that are put together, show the same properties. This feature could in the future be used to design and analyze girihs. These applications are discussed in the latter sections of the paper.

Keywords: Geometry in Architecture, Decagonal Girih, Fibonacci Sequence, Golden ratio.

Introduction

In this paper, a mathematical feature of girih is explained. Girih is a type of geometric design in Islamic art that can be distinguished from calligraphy and vegetal ornaments [6]. It is composed of several polygons filling the surface area of a frame. There is rich literature on girih and Mathematical analysis of Girih is a significant part of this literature.

The literature focusing on girih can be divided into two types of major sources. The first is educational mostly written by master builders of architecture and their apprentices [1–4]. They are meant to teach the traditional methods of designing and drafting girih. The second type is investigative, mostly carried out by academicians. These sources investigate historic, aesthetic, or mathematical, as well as other aspects of Girih. A portion of research has focused on mathematical features of girih design including geometric and numerical. These can be traced back to Bourgoin's work [5]. Academic writings continued in the 20th century, and in the 21st century, a paper by Lu and Steinhardt [22] opened new discussions on the subject. The paper focused on decagonal Girih.

Materials and Methods

Several methods have been used or proposed to categorize Girih designs. A criterion is symmetry group and base regular polygons. Since the only regular polygons that can fill a flat surface are equilateral triangles, squares, and hexagons, but not the pentagons, there is a fundamental difference between the five-fold (decagonal) design and the other three. Five-fold designs are sometimes associated with eastern parts of the Islamic world [13]. In some of the sources authored by Iranian master builders (e.g. Lurzādah, Shaʿrbāf), some controlling rules are mentioned for designing. Fig. 1 shows a set of five polygons that can be used together to fill a surface. the set belongs to a decagonal design called Kund-i dah (meaning obtuse/blunt ten).

*Corresponding Author: Heydaridelgarm@basu.ac.ir

Designs using this set can be subdivided. Subdividing is converting polygons to similar smaller polygons that fill the same frame. The corresponding polygons in the subdivided frame are smaller than the original one. There are several
methods for subdividing and in this paper one introduced by apprentices of Lurzādah a master of Iranian architecture is used [21].

Results

The girih-i kund-i dah which uses the polygons introduced in Fig. 1 can be subdivided to make new designs but with smaller polygons. This has been known by master builders and is introduced in their texts. The most basic Girih pattern introduced in these sources (which has an easy method for drafting) is called ūmm al-girih (meaning mother of knots) since subdividing it results in new designs. The method Lurzādah has introduced for subdividing could be used repeatedly. (Fig. 2) His two apprentices, Raʾīszādah and Mufīd have applied the method four times in a row on a design, but it is not limited to 4 [21]. In decagonal designs, the underlying grid would change by subdividing. This means that there is not necessarily a "combining" action in the opposite direction of subdividing to make a pre-subdivision design. In this paper, it is shown that subdividing is related to the golden ratio and generalization of the Fibonacci sequence. The two concepts are defined below:
a and b are in the golden ratio if this equation is true

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

The value of this ratio is also the result of the equation:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

The golden ratio is an irrational number that is approximately equal to 1.618. Its value to the power of two is one unit larger than itself.

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

This ratio could be shown geometrically in different shapes. The length of a diagonal of a regular pentagon with the side length of one unit is equal to the golden ratio. This relates the ratio to the Fibonacci sequence. Fibonacci introduced his famous sequence in the 13th century [30].
In the first step, a decagonal as shown in fig.2 was subdivided several times. In subdividing by this method similar polygons in the resulting designs would be scaled by reciprocal of phi ($\frac{1}{\varphi}$). Since the designs have frames of the same size, by scaling each design by a factor that equates corresponding polygons of different designs, the frames too would be scaled by that factor. Fig. 3b and 3c show this scaling. Each frame is φ times its previous one. If the length of one of the sides of the first frame is equal to one unit, then along with the lengths of its corresponding sides in the next frames after scaling be listed as a sequence, it would form a geometric progression with common ratio φ. In this sequence, each term (after the second one) is the sum of the two previous terms.
There are examples of self-similar Girih designs (subdivisions of a large scale design by smaller polygons) in real-world in different buildings. Some of their parts could be chosen and put together to show the same result as shown in Fig.4. The sequence was continued by the authors. The theorem was also tested in an approximately 11 by 8 units rectangle. Fig. 5 shows each length of a rectangle is equal to the sum of the two previous ones:

$$l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$$

This is also true for widths. In Fig. 5 the sides of the rectangles (except for the first rectangle) are axes of symmetry for small scale polygons.

Discussion

By subdividing the design, the ratio of the side-lengths of the frame to side-lengths of polygons changes by the golden ratio. The frames could be arranged in a spiral that shows their relation to the generalization of the Fibonacci sequence. These arise from the relation between decagonal designs and the golden ratio which itself is because they are based on pentagons. A diagonal of a pentagon is in extreme and mean (golden) ratio to its sides. As there are pentagons in these designs it could be shown that the side length of pentagons before subdividing is equal to the size of the

diagonal of the pentagon after subdividing. This is shown in Fig. 6. Since all polygons are scaled proportionally, the scale factor is equal for all the polygons within a frame.
By scaling frames by a factor that results in corresponding polygons of the same size, the difference is displayed in frame sides' length. And since the ratio of the corresponding side length of each frame to its previous one is equal to phi a sequence for the scale factor of each member is as follows:
$G_1 = \{\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7, \dots\}$
And since
$\varphi^2 = \varphi + 1$
G_1 is equal to G_2
$G_2 = \{1, \varphi, \varphi + 1, 2\varphi + 1, 3\varphi + 2, 5\varphi + 3, 8\varphi + 5, \dots\}$
As apparent G_2 is a generalization of the Fibonacci sequence, in which, after the first two terms, which are 1 and φ each term is the sum of the two preceding ones.

Conclusion
One of the problems of geometric analysis and designing Girih for a specified frame is defining the size of the polygons. The relation between the size of the frame and the polygons for new designs can be calculated based on an existing design. In future research, such calculations can be used in analyzing and developing algorithmic solutions for designing.

پژوهه باستان‌سنجی ۱۴۰۰؛ ۷(۱): ۲۶۵-۲۵۳

پژوهه باستان‌سنجی

DOI: 10.29252/jra.7.1.253 URL: http://jra-tabriziau.ir/

مقاله پژوهشی

بررسی دنباله‌های ریاضی در آرایه‌های هندسی گره‌های کند ده

مجید حیدری دلگرم *[1]، مهدی برق‌زدگان[2]

۱. استادیار و عضو هیئت علمی گروه معماری، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

۲. کارشناسی‌ارشد معماری، دانشکدهٔ هنر و معماری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۳۰

چکیده

گره در کنار کتیبه و نقوش اسلیمی سه دستهٔ اصلی تزئینات در معماری اسلامی بوده است. این آرایه‌ها در دو دستهٔ اصلی منابع مورد توجه بوده‌اند. دستهٔ اول، منابع آموزشی تألیف استادکاران معماری سنتی و شاگردان ایشان و دستهٔ دوم متون تحقیقاتی دانشگاهی بوده است. ویژگی‌های ریاضی آرایه‌های «گره» در هر دو دستهٔ این منابع مورد توجه بوده است، و پیشتر برخی از این ویژگی‌ها کشف و معرفی شده است. هدف مقالهٔ حاضر، معرفی ویژگی‌ای در خُرد کردن گره‌های ده ایرانی است که پیش از این در ادبیات علمی ناشناخته بوده است و برای نخستین بار در این مقاله معرفی می‌شود. این تحقیق به روش تحلیلی پیش رفته است و اطلاعات از منابع کتابخانه‌ای گردآوری شده‌اند. هر گره شامل تعدادی چندضلعی است که با قرارگیری در کنار یکدیگر، سطحی بزرگتر (زمینه) را می‌پوشانند. خُرد کردن گره به معنی تبدیل گره به گرهی دیگر در همان زمینه و با اجزای کوچکتر است. این عمل به روش‌های مختلفی انجام می‌شود و استادان معماری سنتی برخی از آن‌ها را معرفی کرده‌اند. در این مقاله، یکی از روش‌هایی که استاد حسین لرزاده معرفی کرده‌اند مبنا قرار داده شده است. نتایج مقاله نشان می‌دهد در خرد کردن متوالی گره‌های کند ده، اجزای چندضلعی گره‌ها با نسبت معکوس عدد فی کوچک می‌شوند و با ثابت نگه داشتن اندازهٔ چندضلعی‌های تشکیل‌دهنده، اندازهٔ زمینه مطابق تعمیم دنبالهٔ فیبوناتچی و در رابطه‌ای با نسبت طلایی رشد می‌کند. زمینه‌های متوالی حاصل از خُرد کردن متوالی را می‌توان در چیدمانی مارپیچ مرتب کرد. در این صورت، رابطهٔ تعمیم فیبوناتچی میان اضلاع زمینه‌ها نمودار خواهد بود. نمونه‌هایی واقعی از اجزای گره‌های بناها و نمونه‌هایی ترسیمی در چنین چیدمانی در مقاله آورده شده‌اند. اثبات ویژگی‌های یافته شده در این تحقیق به کار تحلیل هندسی و طراحی گره‌ها خواهد آمد، و نتایج آن را می‌توان پایه‌ای برای مسئلهٔ طراحی گره‌های جدید برای زمینه‌های مختلف قرار داد.

واژگان کلیدی: هندسه در معماری، گره کند ده، دنبالهٔ فیبوناتچی، نسبت طلایی

* نویسندهٔ مسئول مکاتبات: همدان، دانشگاه بوعلی سینا، گروه معماری، کد پستی: ۳۸۶۹۵-۶۵۱۷۸

پست الکترونیکی: Heydaridelgarm@basu.ac.ir

۱. مقدمه

گره[1] (تزئینات هندسی) در کنار کتیبه و اسلیمی یکی از سه دستهٔ اصلی آرایه‌های معماری اسلامی است. هنرمندان و معماران ایرانی توجهی ویژه به گره‌ها داشته‌اند و تنوع و فراوانی گره‌ها در بناهای ایرانی شاهدی بر آن است. این نوع از تزئینات ویژگی‌های هندسی مختلفی دارند. در گذشته، برخی از ویژگی‌های ریاضی این گره‌ها شناسایی و معرفی شده است. هدف این پژوهش، معرفی ویژگیِ پیشتر ناشناخته‌ای از آن‌ها است، که می‌تواند نکات جدیدی را روشن کند. یکی از امکاناتی که در طراحی و ترسیم گره‌های ده ایرانی وجود دارد، خرد کردن یا تبدیل آن‌ها به گره‌های با چندضلعی‌های (آلت‌های[2]) ریزتر و به وجود آوردن گره‌های جدید است. این پژوهش نیز با این سئوال اصلی که «خُرد کردن گره‌های ده ایرانی با چه نظم ریاضی پیش می‌رود؟» و این سئوال‌های فرعی که «اندازهٔ آلت‌ها در خرد کردن گره با چه رابطهٔ ریاضی پیدا می‌شود» و «چه نسبتی میان زمینه‌های خردشده گره کند ده برقرار است؟» پیش رفته است.

این پژوهش از جهت شناخت بیشتر روابط ریاضی حاکم بر گره‌ها که پیشتر ناشناخته بوده‌است، اهمیت دارد. دانش فعلی ما دربارهٔ گره‌ها که می‌توان آن را ذیل هندسه در معماری طبقه بندی کرد، بیشتر شامل جنبه‌های ترسیمی است و دربارهٔ طراحی گره‌ها برای زمینه‌های مختلف بسیار محدود است. این مقاله، بخشی از روابط ریاضی گره‌های مختلفی که در یک زمینه جای می‌گیرند را با یکدیگر و با زمینه روشن می‌کند. از این جهت کار را در تحقیقات آینده برای تدوین روش‌های طراحی گره‌ها تسهیل می‌کند. همچنین با توجه کهولت سن یا از دنیا رفتن بسیاری از استادکاران سنتی در سال‌های اخیر که فنون طراحی و ترسیم گره‌ها را می‌شناختند، در صورت بی‌توجهی به دانش مربوط به گره‌ها، این دانش ممکن است به فراموشی سپرده شود. از این نظر، تحقیقات دانشگاهی در این زمینه ضروری به نظر می‌رسد.

۲. روش پژوهش

برای پیش‌بردن این تحقیق، نمونه‌هایی از گره‌های کند ده به روشی که در ادامهٔ مقاله آمده است، چند مرتبه و با اعمال هندسی خرد شد. سپس روابط ریاضی میان گره‌های اولیه و نمونه‌های بعدی بر اساس استدلال‌های ریاضی، تحلیل شد. از آنجا که احکام تحقیق با روش‌های ریاضی اثبات شده‌اند، ذیل استدلال منطقی (Deduction) و در دستهٔ روش‌های تحلیلی قرار می‌گیرند. احکام اثبات شده، سپس در چند نمونه که از بناهای مختلف انتخاب شده‌اند و در کنار هم قرار گرفته‌اند، و همچنین نمونه‌هایی در زمینه‌های مستطیلی نمایش داده شده‌اند. برای انتخاب نمونه‌ها، گره‌هایی در منابع آموزشی، کاتالوگ‌های بناهای معماری، بانک‌های اطلاعاتی که شامل تصاویر گره نیز بودند، و تعدادی از بناهای معماری جستجو شدند که این جستجو به سه نمونه‌ای که در مقاله به آن‌ها اشاره شده است، منتج شد. انتخاب این نمونه‌ها جنبهٔ آماری ندارد و فقط مثال‌هایی است که درکی شهودی از حکم اثبات شده به دست دهد. سطح هدف این پژوهش، توسعه‌ای است و برای پاسخ به سئوال اصلی تحقیق، روش‌های ترسیم و خرد کردن گره از منابع کتابخانه‌ای جمع‌آوری شده است.

۳. پیشینهٔ پژوهش

نوشته‌های متأخر دربارهٔ نقوش هندسی در عالم اسلامی را از اواخر قرن نوزدهم میلادی و سیزدهم هجری تا کنون، از حیث هدف می‌توان به دو دستهٔ متون آموزشی و متون تحقیقی تقسیم کرد. عمدهٔ متون آموزشی را استادکاران معماری و درودگری یا شاگردان ایشان نوشته‌اند. در این منابع، روش‌های ترسیم و گاه طراحی تزئینات از جمله گره‌ها به روش‌های مختلف آموزش داده شده است و گاه روش‌ها یا نمونه‌هایی از اجرای آن‌ها نیز آورده شده است. نمونه‌های مشهورتر این دسته شامل منابع تألیفی استادان لرزاده [1]، شعرباف [2]، زمرشیدی [3] و ماهرالنقش [4] است.

متون تحقیقی را هم با توجه به روش‌ها و اهداف آن‌ها می‌توان به دسته‌های مختلفی تقسیم کرد، با این حال چهار دستهٔ تحقیق با اهداف معناشناختی، زیبایی‌شناختی، تاریخی و ریاضی پررنگ‌تر از دیگر تحقیق‌ها بوده است. از این چهار دسته، سیر متون دستهٔ آخر که به تحلیل‌های ریاضی نقوش می‌پردازند به علت خویشاوندی‌شان با این تحقیق به صورت مشروح‌تر بررسی می‌شود.

اولین بار، تحلیل قواعد ترکیب هندسی در دو کتاب ژول بورژوان، به نام *هنر عرب‌ها*، ۱۸۷۳ [5] و *عناصر هنر عربی: ویژگی درهم‌بافتگی*، ۱۸۷۹ [6] تحلیل شد. چنین تحلیل‌هایی در اروپا پس از تهیهٔ اندوخته‌ای از نقوش و کاتالوگ‌های پر از تصویر از جمله کتاب‌های جونز [7] ممکن شده بود. بورژوان سه سبک اصلی تزیین در کتاب *عناصر هنر عرب* تشخیص داده بود، تزیین یونانی را حیوانی، تزیین عربی را کانی، و تزیین ژاپنی (چینی) را نباتی خوانده بود [6]. نسبت دادن نقوش اسلامی به بلورها در آن دوره بسیار تعجب برانگیز است و به احتمال زیاد، بورژوان نمی‌دانست که در آینده چه میزان تحلیل هندسی گره‌ها با بلورشناسی مرتبط خواهد شد. در آن دوره، تحقیق‌های هندسی در مراحل اولیه بود و چنان که گفتیم مخاطب اروپایی آن اغلب جامعهٔ صنعتی بود که به دنبال نقوش مدولار و قابل تکرار می‌گشت [8]. چنین تحقیق‌هایی دربارهٔ گره ها کم‌کم به این سمت می‌رفت که به جای تحلیل اجزای نقوش، ساختار آن‌ها را تحلیل کند. چنین روندی از مقایسهٔ کارهای نویسندگان متقدمی نظیر جونز و نویسندگانی مثل بورژوان که کمی پس از آن‌ها آمدند، روشن می‌شود. ادعای جونز مبنی بر قواعد هندسی گره ها فقط در این سطح تحلیل باقی می‌ماند که «نقوش، تقاطع خطهای هم‌فاصله حول مرکزهایی» هستند [7] اما بورژوان در کتابش زیرنقش‌هایی با خطچین برای نقوش مختلف عرضه کرده بود [5]. ایده‌ای که در کتاب *نقوش اصلی هندسی برای پارچه*، نوشتهٔ دیوید رمزی نیز تکرار شده است [9]. ادامهٔ کار بورژوان را می‌توان در کتاب *شیوه‌های سنتی طراحی نقش*، نوشتهٔ کریستی نیز دید که به جای تحلیل اجزای گره به تحلیل ساختاری آن‌ها پرداخته است [10]. تحلیل‌های ریاضی و گاه با توجه به زیر نقش پس از آن هم ادامه داشت، از جمله نوشته‌های لی [11]، کپلان [12]، نوایی و حاجی‌قاسمی [13]، سرهنگی [14]، بادنر [15]، بُنر [16].

ویژگی کارهای کپلان طراحی گره برای زمینه‌های با انحنای یک یا دوجهته با استفاده از اعوجاج‌های زیرنقش و همچنین استفاده از الگوریتم‌های کامپیوتری برای گسترش نقش است. نوایی و حاجی‌قاسمی [13] نیز شبکه‌های زیرنقش متشکل از سه نوع لوزی برای گره‌های مختلف پیشنهاد کرده‌اند. ریگبی نیز در مقاله‌ای از امکان انطباق گره‌های ده بر الگوهای پنرُز پرسش کرده است [17]. همین مسئله را اسلام‌پناه در کتاب *گره‌درگره* بررسی کرده است [18]. اسلام‌پناه در مقاله‌ای قدیمی‌تر نیز نسبت‌های طلایی بین اضلاع آلات گره را تشریح کرده است [19]. مقالهٔ حاضر به روابط میان گره‌ها قبل و پس از خرد کردن می‌پردازد، شفیع‌زاده و سلطان‌محمدلو [20] روشی گام‌به‌گام را بر مبنای روش معرفی شده توسط شاگردان استاد لرزاده [21] برای ترسیم گره بر مبنای قاعدهٔ خرد کردن بررسی کرده‌اند.

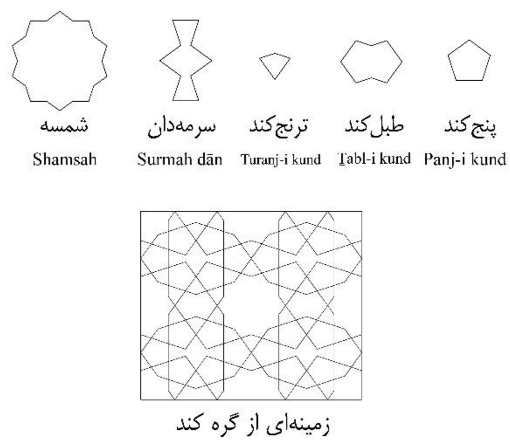
مهم‌ترین تحقیق سال‌های اخیر، مقاله‌ای است که در سال ۲۰۰۷ میلادی دربارهٔ گره‌ها توسط لو و اشتاینهارت منتشر شد. این مقاله تصور تحلیل کامل مسئلهٔ گره بر هم ریخت [22]. آن تحقیق بر گرهی از مقبرهٔ درب امام اصفهان متمرکز بود و نشان داده بود که آن گره تقریباً به صورت کامل (در واقع به جز یازده مورد از ۳۷۰۰ مورد همنشینی) ساختاری شبه‌بلوری دارد. ساختارهای شبه‌بلوری، بر خلاف بلورهای هندسی (که بر مبنای مثلث و مستطیل و شش ضلعی هستند) تکرارهای محدود ندارند و قابلیت دارند به صورت نامحدود، همنشینی‌های جدید ایجاد کنند. تحقیق‌های دیگری پس از این مقاله و کم‌وبیش بر اثر آن انجام شد. از جملهٔ آن‌ها مقالهٔ کرامْوِل [23] کتاب بروگ [24] و فصلی است که سالتزمن [25] در کتاب *معماری و ریاضی از باستان تا آینده* [26] نوشته است. مقالهٔ حاضر در ادامهٔ تحقیق‌هایی که تا کنون دربارهٔ جنبه‌های

ریاضی گره‌ها انجام شده است، قصد دارد روابط ریاضی را که در این روش سنتی خرد کردن گره‌های کند ده (که نمونه‌ای از گره‌های خودمتشابه هستند) روشن‌تر کند و راه را برای تحقیقات در تدوین روش‌های کامل‌تر طراحی و تحلیل گره‌های بر مبنای پنج‌ضلعی بگشاید.

٤. گره‌های کند ده

مستشرقان در تقسیم‌بندی رایج‌شان، اَرَبِسک (arabesque) یا تزییناتی را که در معماری اسلامی به کار می‌رفت به سه دستهٔ هندسی و گیاهی و نوشتاری (کتیبه‌ای) تقسیم می‌کردند [8]. با وجود نقص‌هایی که در این تقسیم‌بندی بود، تزیینات هندسی اسلامی (یا عربی)، در نوشته‌های مستشرقان اشاره به مفهومی داشت که در جهان ایرانی «گره» می‌خواندندش.[۳] طرح گره‌ها با وجود مشابهت‌هایی که در همهٔ ممالک اسلامی دارند، کاملاً یکسان نیستند و برخی مستشرقان ازجمله جونز لهجه‌های محلی تزیینات اسلامی را تفکیک کرده‌اند.[۴] یک روش معمولاً در تقسیم‌بندی گره ها چه نزد مستشرقان، چه در منابع بومی، تفکیک آن‌ها بر اساس تعداد واگیره‌های[۵] حول شمسه، یا تعداد اضلاع چند ضلعی منتظمی است که مبنای ترسیم گره بوده باشد. به این روش، گره‌هایی که بر مبنای مثلث و شش‌ضلعی بودند دارای شمسه‌های شش یا نه یا دوازده و مانند آن‌ها بودند، گره‌های بر مبنای مربع و مستطیل، دارای شمسه‌های هشت و شانزده، و گره‌های بر مبنای پنج، دارای شمسه‌های ده بودند. شکل‌های مثلث و مستطیل و شش‌ضلعی منتظم، شکل‌هایی هستند که با آن‌ها می‌توان سطوح را پر کرد. تقارن‌های کلاسیک بلورشناسی هندسی نیز بر مبنای آن‌ها است. گره‌هایی که بر مبنای شکل‌های مثلث و مربع و مستطیل و شش‌ضلعی هستند بر مبنای همین قانون هندسی پرکردن صفحه ایجاد شده‌اند. وضعیت گره‌های مبتنی بر پنج‌ضلعی به کلی متفاوت است. پنج‌ضلعی خاصیت شکل‌های پیشین را ندارد و صفحه را نمی‌توان به تنهایی با آن پر کرد و از نظر بلورشناسی کلاسیک، تقارنی غیرممکن است [22]. گره‌های بر مبنای پنج ضلعی را بیشتر، مربوط به شرق عالم اسلام و ایران می دانند [13]. در ایران این گره‌ها را با توجه به شمسهٔ آن‌ها «گره ده» می‌خوانند.

گره‌ها در منابع معاصری که استادکاران و شاگردان‌شان تدوین کرده‌اند، دارای چند قانون ساده هستند. این که گره «آلت خارج»[۶] نداشته باشد و این که گره، سطح زمینه را به صورت کامل بپوشاند [21] و اگر زمینه با آلتی برخورد کند باید حتماً از روی خط تقارن آلت عبور کند. منظور از آلت خارج، آلتی غیر از آلت‌های تعریف شده برای هر خانواده از گره‌ها است. در این منابع، گره کند دوپنج که یکی از گره‌های کند ده است، معمولاً از اولین گره‌هایی است که آموخته می‌شود [21] و علت نیز سادگی و ترسیم سایر گره‌های ده بر مبنای همین گره است. آلت‌های گره‌های کند، شامل شمسه‌کند، ترنج‌کند، پنج‌کند، طبل‌کند، و سرمه‌دان است (شکل ۱).

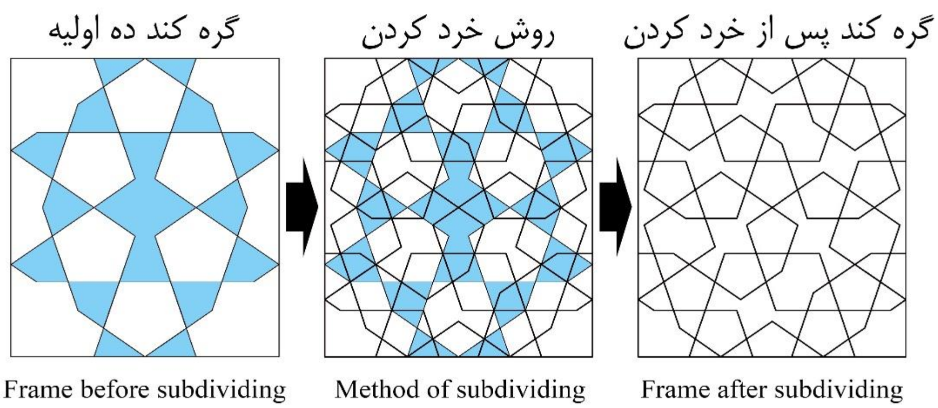


شکل ۱: آلت‌های گره کند و یک نمونه گره کند در زمینه‌ای مستطیلی، [21] بازترسیم از نگارندگان
Fig. 1: Set of polygons of girih-i kund-i dah, [21] Redrawn by authors.

٥. خرد کردن

گره‌های کند ده را می‌توان در درون خودشان تقسیم کرد. در منابع معاصر تألیفی استادکاران سنتی، به خاصیت زایایی گره در درون خودش، خرد کردن می‌گویند. میان ایشان مشهور است که گره در درون خود بطن دارد و توانایی زایش و به وجود آوردن گره‌های نو از آن وجود دارد. گره کند

دوپنج را به این علت «امالگره» یا مادر دیگر گره ها نامیده‌اند که قابلیت به وجود آمدن سایر گره‌ها از آن وجود دارد. قابلیت خرد شدن گره ده در درون خودش (یعنی تقسیم متوالی) هم به صورت هندسی اثبات شده است [22] و هم به صورت عملی تا چهار مرحله توسط رییس‌زاده و مفید ترسیم شده است [21].



شکل ۲: گره کندی که به روش تو حلقی به گره کند ریزتری خرد شده است.
Fig. 2: The subdividing method introduced by ustād Lurzādah

خُرد کردن گره‌های با تقارن‌های کلاسیک بلورشناسانه، یعنی مبتنی بر شبکه‌های زیرنقش سه و چهار و شش ضلعی تفاوت بنیادی با خرد کردن گره‌های مبتنی بر پنج‌ضلعی دارد. در خرد کردن گره‌های اخیر، احتمال تغییر شبکهٔ زیرنقش نسبت به مقیاس بزرگتر گره (مقیاس قبل از خرد شدن) وجود دارد. در واقع از گره خرد شده نمی‌توان الزاماً به گره پیش از خرد شدن پی برد. فقدان ارتباط مستقیم در این دو مقیاس، سبب دشواری در طراحی و ترسیم است که منشأ امکان ویژهٔ گره‌های برمبنای پنج هم از همان است. تنوع بی‌نهایت مورد اشارهٔ معماران سنتی در گره‌های پنج از همین ویژگی برمی‌خیزد. دانش ریاضی مربوط به این ویژگی در بلورهای مرتبط با پنج‌ضلعی، چند دههٔ پیش کشف شد و ارتباط آن با گره‌های ایرانی در دوره‌های اخیر و در یافته‌های فیزیکدانان روشن شد. به نظر می‌رسد معماران سنتی با مفهوم بی‌نهایت بودن تعداد گره‌های منشعب به کمک خرد کردن، آگاه بوده‌اند. بی‌نهایت بودن ترکیبات زیرنقش‌های خودمتشابه به صورت هندسی ثابت شده است [27]، و مفهوم‌های «۷۲ بطن گره» در زبان معماران سنتی، اشاره به همان مفهوم را به ذهن می‌آورد. هر چند امکان خردکردن، از نظر هندسی، به صورت نامتوالی و تا بی‌نهایت وجود دارد، در عمل، پس از چندین مرحلهٔ خرد کردن، آلت‌های گره به حدی ریز می‌شوند که امکان اجرا با مصالح معمول را نخواهند داشت. در اینجا یادآوری تفاوت‌های هندسهٔ عملی و نظری از منظر فارابی خالی از لطف نیست [28]، و بر مبنای آن می‌توان گفت، نکته‌های منقول از معماران سنتی دربارهٔ تعداد توالی خرد کردن، به هندسهٔ نظری اشاره دارد.

٦. نسبت طلایی[۷]

نسبت طلایی از اعداد گنگ است. مقدار دقیق این عدد در شکل ۳: الف نمایش داده شده است. مقدار تقریبی آن برابر با ۱/۶۱۸ است. این مقدار را به راه‌های متفاوتی می‌شود ترسیم کرد. برای مثال طول قطر هر پنج ضلعی منتظم به ضلع یک واحد برابر با مقدار نسبت طلایی است (شکل ۶). معادله‌ای که در رابطهٔ یک (شکل ۳: R_1) آمده است، معادله‌ای از درجهٔ دوم است و دو پاسخ دارد. یکی از این دو پاسخ، برابر با

مقدار نسبت طلایی است. پس توان دوم نسبت طلایی نیز یک واحد بیشتر از خودش است (شکل ۳: R_2).

۷. دنبالهٔ فیبوناتچی

فیبوناتچی[8] اولین بار در اوایل سدهٔ سیزدهم میلادی دنباله‌ای را معرفی کرد که به نام خودش مشهور شد. او این دنباله را در کتاب *لیبِرآباچی (Liber Abaci)* و ذیل مسئلهٔ «خرگوش‌ها چگونه تکثیر می‌شوند؟» معرفی کرد. کتاب او لیبرآباچی در برخی از مسائل، متأثر از خوارزمی و همچنین ابوکامل، ریاضیدان مصری است. خود فیبوناتچی در متن کتاب به این تأثیرپذیری‌ها اشاره نکرده است [29]. در این دنباله نحوهٔ تکثیر شدن جفت خرگوش‌ها محاسبه می‌شد. تعداد جفت خرگوش ها در هر دور تولیدمثل، جمله‌های دنبالهٔ تصاعد را می‌ساخت. نکتهٔ مهم در نحوهٔ حل این مسئله، استفاده از مقدار اعضای قبلی در محاسبهٔ عضو جدید بود [30].

۸. اثبات وجود دنبالهٔ فیبوناتچی در طول زمینهٔ در خردکردن متوالی گره کند ده

به منظور اثبات مسئله، ابتدا گرهی بر اساس روش توحلقی بارها خرد شد. شکل ۲ خرد کردن گره‌ها را به روش توحلقی نشان می‌دهد که در گره محصول، معادل کند آلت‌ها در نظر گرفته شده است. در خرد کردن به روش توحلقی نسبت میان اندازهٔ آلات نظیر (برای مثال طول ضلع پنج ضلعی‌ها) در گره ثانویه نسبت به گره اولیه، برابر با معکوس عدد فی (φ) است (شکل ۳: ب). اگر گره‌های ریز تمام زمینه‌ها هم مقیاس شوند آنگاه این تصاعد در اندازهٔ زمینه‌ها منعکس می‌شود به گونه‌ای که اندازهٔ هر زمینه نسبت به زمینهٔ قبلی‌اش فی برابر می‌شود (شکل ۳: ج). در این صورت اگر اندازهٔ اضلاع نظیر زمینه‌ها در یک توالی نوشته و اندازهٔ عضو اول یک واحد در نظر گرفته شود، دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت عدد فی تشکیل می‌شود (شکل ۳: G_1) با استفاده از رابطهٔ دو (R_2) برای ساده‌تر کردن اعضای این دنباله، دنبالهٔ دو (G_2) حاصل می‌شود. در این دنباله، مشاهده می‌شود که مقدار هر عضو برابر با مجموع دو عضو قبلی است. به عبارت دیگر، مقیاس گره‌های کند ده را می‌توان با روش‌های سنتی مطابق عدد طلایی کوچک و نمونهٔ جدیدی ترسیم کرد. در این حالت، اندازهٔ زمینه‌ها ثابت و مقیاس گره‌ها در هر نمونه فی برابر کوچک می‌شود (شکل ۳: ب). حال اگر اندازهٔ آلت‌های متناظر همهٔ گره‌های متوالی را یکی کنیم این تغییر مقیاس، اندازهٔ زمینهٔ گره‌ها را تغییر می‌دهد به گونه‌ای اندازهٔ زمینهٔ هر گره، فی برابر اندازهٔ زمینهٔ نمونهٔ قبلی است (شکل ۳: ج). به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که در این حالت گره ده بر اساس نسبت طلایی در حال گسترش در زمینه است. همچنین با تبدیل مراتب توانی عدد فی به مضارب صحیح درجه یک آن (مطابق رابطهٔ شمارهٔ دو R_2) در اندازهٔ زمینه‌ها، چنان که پیدا است اندازهٔ هر ضلع زمینه در هر نمونه برابر با مجموع طول اضلاع نظیر در دو نمونهٔ قبلی خود است و می‌توان مانند دنبالهٔ فیبوناتچی برای محاسبهٔ اندازهٔ هر زمینه، از دو زمینهٔ قبلی استفاده کرد (شکل ۵).

۹. نمونه‌های شناسایی شده

در بین گره‌های ریز شاه‌گره‌های[9] کند ده بناهای مختلف نیز مقیاس‌های مختلفی وجود دارد. به این مفهوم که اگر آلات متناظر گره‌های ریز[10] را در نمونه‌های خرد شده، هم مقیاس در نظر بگیریم آنگاه آلت‌های متناظر در گره‌های درشت آن‌ها، که حکم زمینهٔ آن‌ها را دارند، یک اندازه و مساوی نخواهند بود. آلت‌های متناظر در گره‌های درشت، متناسب با اعضای متوالی دنبالهٔ فیبوناتچی و با تغییر مقیاسی به نسبت فی خواهند بود. برای نمایش این مفهوم، بخش‌هایی از گره‌های موجود در مدرسهٔ چهارباغ و مقبرهٔ درب امام در کنار هم قرار گرفتند، طول زمینه‌های آن‌ها تصاعدی را تشکیل داد که تا دو مرحله توسط نگارندگان ادامه یافت. این تصاعد را می‌توان تا هر تعداد ادامه داد (شکل ۴).

A: الف:

Golden ratio is equal to $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — نسبت طلایی برابر با $\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ است

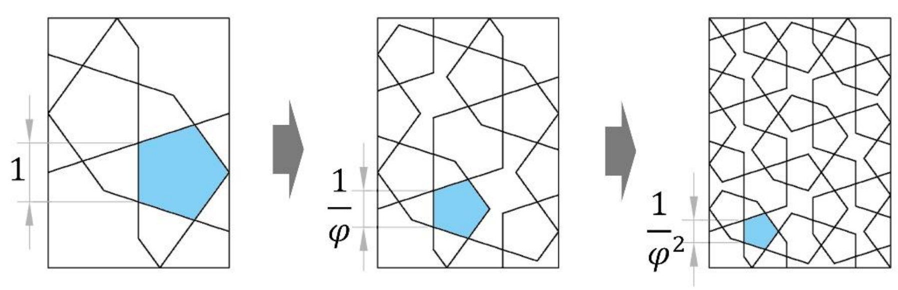
Equation one $R_1 \quad x^2 = x+1 \Rightarrow x = \left(\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \text{ ، } \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$ رابطهٔ شمارهٔ یک

Equation two $R_2 \quad \phi = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1$ رابطهٔ شمارهٔ دو

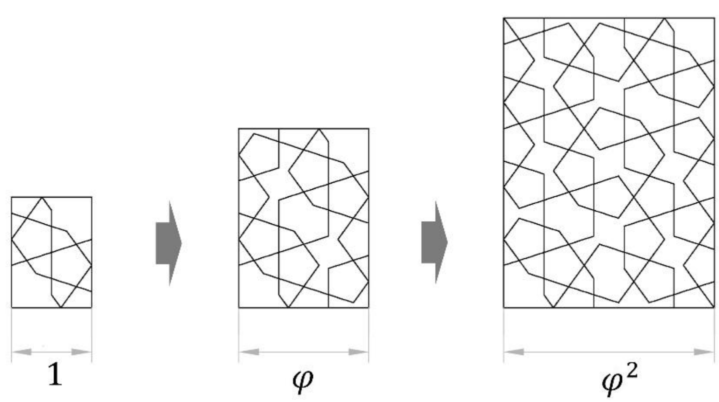
Sequence one $G_1 = \{\phi^0$ و ϕ^1 و ϕ^2 و ϕ^3 و ϕ^4 و ϕ^5 و ϕ^6 و ...$\}$ دنبالهٔ شمارهٔ یک

Sequence two $G_2 = \{1$ و ϕ و $\phi+1$ و $2\phi+1$ و $3\phi+2$ و $5\phi+3$ و $8\phi+5$ و ...$\}$ دنبالهٔ شمارهٔ دو

B: ب:

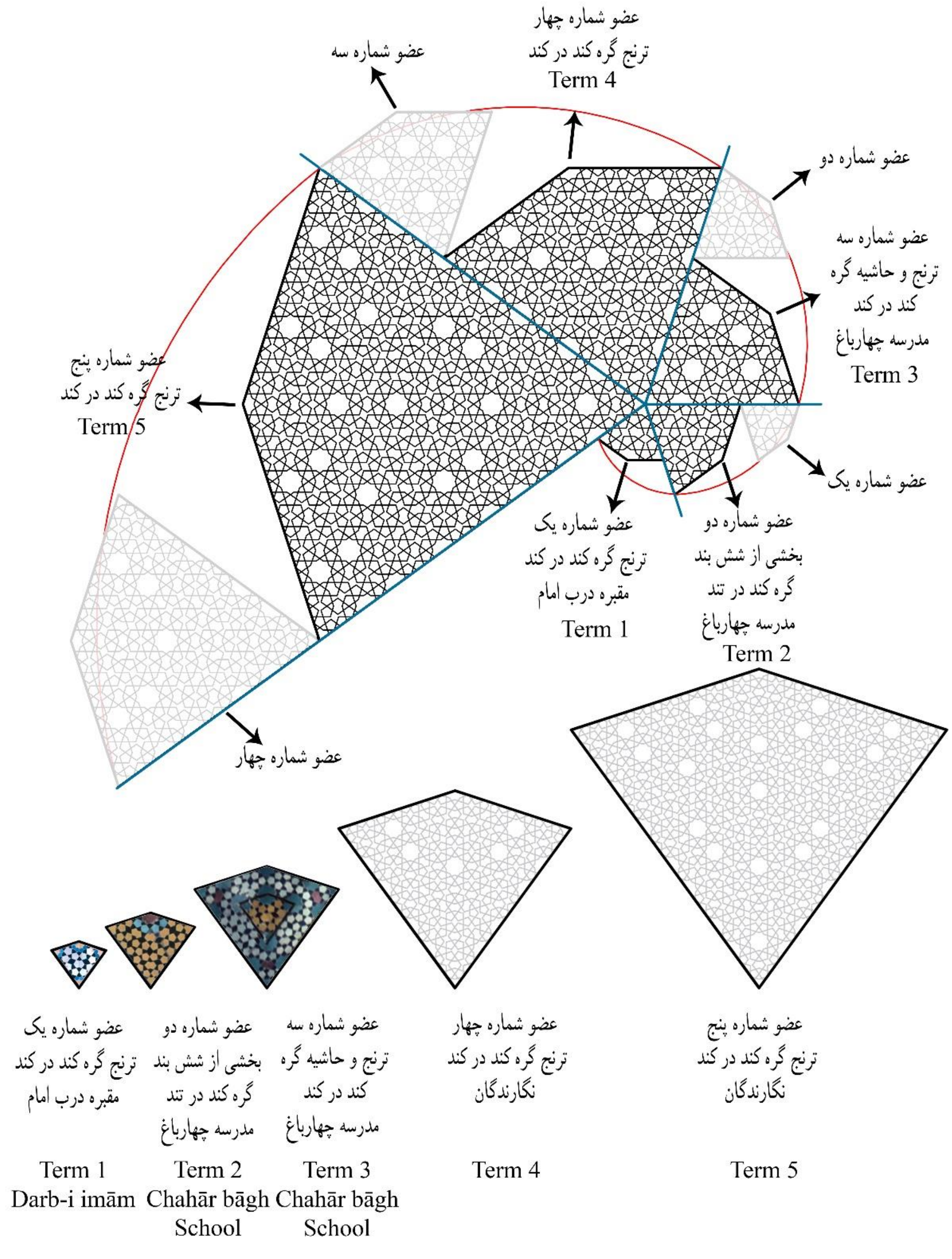


C: ج:



شکل ۳: (الف) روابط ریاضی؛ (ب) خرد کردن متوالی گره کند ده به روش توحلقی و ثابت نگه داشتن اندازهٔ زمینه‌ها (ج) هم‌مقیاس کردن گره‌های ریز زمینه‌ها و انعکاس تغییرات در اندازهٔ زمینه‌ها

Fig. 3: A) Mathematical equations B) Subdividing and maintaining frame dimensions C) Subdividing and maintaining polygon dimensions.

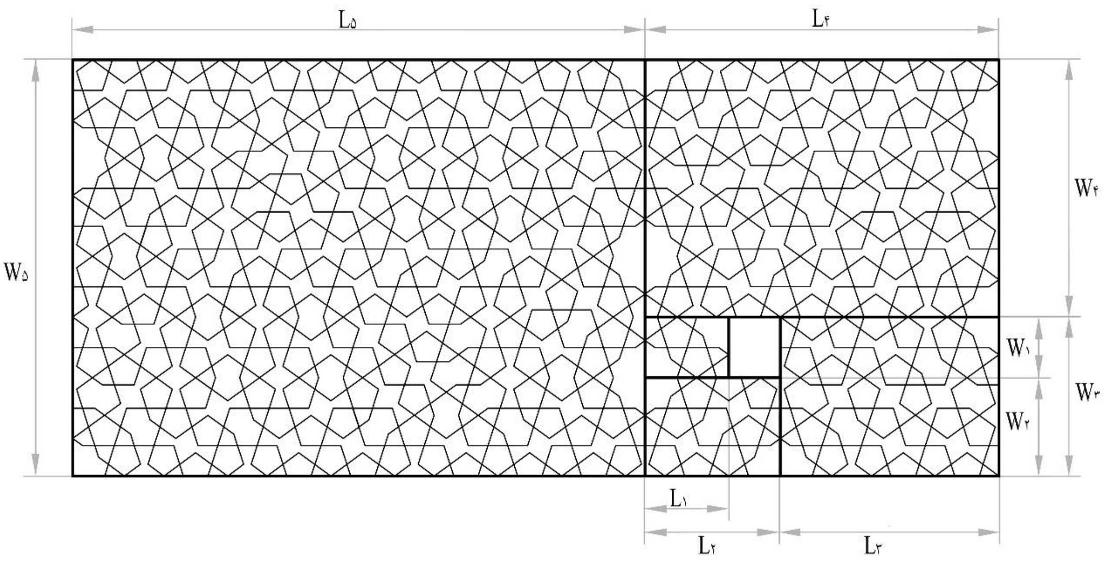


شکل ۴: نمونه‌هایی از ترنج در گره‌های موجود در بناهای تاریخی که زمینه‌های آن‌ها در مارپیچ تعمیم فیبوناتچی قرار می‌گیرد.
Fig. 4: Real world samples of kite polygons arranged in generalization of Fibonacci sequence and extended by authors.

چنان که در مطالب پیشین ذکر شد، محصول خرد کردن متوالی گره کند ده به روشی که استاد لرزاده معرفی کرده است، گره‌هایی است که اگر اندازهٔ آلت‌هایشان را ثابت نگه داریم طول زمینه‌های آن‌ها در دنباله‌ای از نسبت فیبوناتچی رشد می‌کند. این توالی طول‌ها همچنین تصاعدی هندسی می‌سازد که نسبت جمله‌های متوالی آن به هم برابر عدد فی یا نسبت طلایی است.

۱۰. آزمون روش برای یک زمینهٔ مستطیلی

در باب‌های پیشین مقاله، نمونه‌هایی از توالی‌های مختلف گره کند ده در زمینهٔ ترنج در بناهای تاریخی معرفی شد. با این حال از آنجا که زمینهٔ ترسیمی بسیاری از گره‌های ده، مستطیلی به نسبت حدودی ۸ به ۱۱ است، [3,31] [11] برای آزمون ویژگی نویافته در گره‌ها، گره‌هایی با زمینه‌ای مستطیلی به طول و عرضی با همین نسبت انتخاب شد و توالی فیبوناتچیِ زمینه در آن نمایش داده می‌شود. گره به صورت متوالی با روش توحلقی خرد شده است. در پایان، جهت سهولت در نمایش دنبالهٔ فیبوناتچی در توالی اندازهٔ گره ها، آلت‌های متناظر گره‌ها هم‌مقیاس شده‌اند تا نسبت مورد نظر در اندازهٔ زمینه‌ها منعکس شود. مستطیل‌های زمینه به صورت متوالی و به طور مارپیچ در کنار هم قرار گرفته‌اند (شکل ۵). دراین شکل، طول یا عرض هر مستطیل زمینه، برابر با جمع طول یا عرض دو مستطیل کوچکتر از خودش است. برای مثال، مجموع اندازهٔ L_2 و L_3 برابر با اندازه L_4 است که بر همنشینی گره‌های این زمینه‌ها نیز در کنار هم با اصول گره تطابق دارد. این قاعده که ویژگی دنبالهٔ فیبوناتچی است برای زمینه‌های دیگر نیز صادق است.



شکل ۵: وجود رابطهٔ تعمیم فیبوناتچی میان طول و عرض در یک نمونه زمینهٔ مستطیلی
Fig. 5: Generalization of Fibonacci in widths and lengths of rectangular frame

۱۱. کاربرد

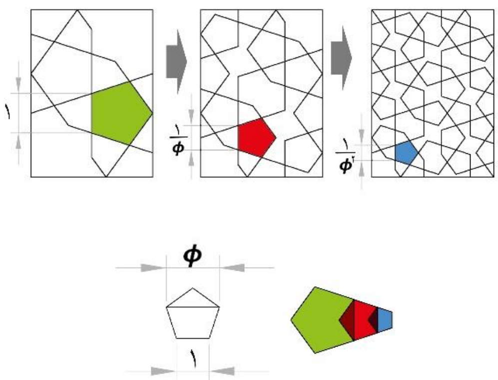
یکی از دشواری‌ها در تحلیل هندسی گره‌ها و طراحی گره برای زمینه‌ای خاص، معلوم کردن اندازهٔ آلت‌ها است. در گره‌هایی که دست‌گردان نیستند و از قواعد هندسی تبعیت می‌کنند، اندازهٔ آلت‌های متناظر در کل زمینه یکسان باقی می‌ماند. به کمک یافته‌های این تحقیق می‌توان از روی یک گره کند ده ترسیم شده برای یک زمینهٔ خاص، اندازهٔ آلت‌ها را برای گره‌هایی به مقیاس‌های خردتر که در آن زمینه قابل ترسیم است، محاسبه کرد. در کارهای بعدی می‌توان چنین

محاسبه‌هایی را پایهٔ حل مسئلهٔ گره به کمک الگوریتم های رایانه‌ای برای زمینه‌های مسطح و منحنی قرارداد. همچنین این مسئله را در گره‌های غیر ده تحقیق کرد.

۱۲. بحث

در این مقاله، ویژگی نویافته‌ای از گره‌های کند ده نشان داده شد. اگر گره کند ده به روش توحلقی که استاد لرزاده نشان داده است خرد شود، بدون تغییر زمینه گره هایی به دست می‌آید که اندازهٔ آلت‌هایشان به نسبت ذات وسط و طرفین (یا نسبت طلایی) کوچک می‌شوند. حال اگر زمینهٔ این گره‌های متوالی به نحوی بزرگ شوند که آلت‌های متناظر در این گره‌های متوالی هم‌اندازه شوند، طول و عرض اندازهٔ زمینه‌ها در دنباله ای رشد می‌کند که ویژگی‌های دنبالهٔ فیبوناتچی را دارد؛ یعنی طول یا عرض زمینهٔ هر گره برابر با جمع طول یا عرض زمینه‌های دو گره قبل از خودش است، اما چرا این ویژگی در گره‌ها پیدا می‌شود؟

هستهٔ ارتباط گره‌های کند ده با دنبالهٔ فیبوناتچی ارتباط آن‌ها با نسبت ذات وسط و طرفین است، و علت ارتباط آن‌ها با این نسبت ارتباط‌شان با پنج‌ضلعی منتظم است. در پنج‌ضلعی منتظم میان قطر و ضلع، نسبت ذات وسط و طرفین برقرار است. در خرد کردن متوالی گره کند ده نیز (با ثابت نگه داشتن اندازهٔ زمینه) آلت‌های پنج (که به شکل پنج‌ضلعی منتظم هستند) به نحوی کوچک می‌شوند که قطر آلت پنجِ بَعدی برابر ضلع آلت پنج قبلی است (شکل ۶). در نتیجهٔ رابطهٔ ریاضی شمارهٔ دو نشان داده شد که مجذور نسبت ذات وسط و طرفین برابر یک واحد بیش از نسبت ذات وسط و طرفین است. با ثابت نگاه داشتن اندازهٔ آلت‌ها، اندازهٔ زمینه در نسبت مستقیم با دنباله‌ای از توان‌های صحیح نسبت ذات وسط و طرفین رشد می‌کند (شکل ۳: G_1). این دنباله با توجه به نتیجهٔ رابطهٔ شمارهٔ دو قابل تبدیل به دنبالهٔ شمارهٔ دو است. همهٔ این تبدیل‌ها به علت ویژگی نسبت ذات وسط و طرفین ممکن بود. چنان که در دنبالهٔ شمارهٔ دو مشخص است هر جمله برابر با جمع دو جملهٔ پیشین خود است.



شکل ۶: تناسب آلت‌های پنج در خرد شدن متوالی
Fig. 6: Scale factor of pentagons in repeatedly subdividing

در مقاله، نشان داده شد از آنجا که گره‌های ده بر مبنای پنج‌ضلعی منتظم هستند با نسبت ذات وسط و طرفین ارتباط دارند. این نسبت، سبب به وجود آمدن دنبالهٔ فیبوناتچی در زمینهٔ گره‌هایی است که به صورت متوالی با روش توحلقی استاد لرزاده خرد می‌شوند. از این ویژگی نویافته می‌توان در طراحی گره‌ها و حل مسائل هندسی گره‌ها استفاده کرد. نمونه‌هایی از این گره‌ها را در آثار تاریخی نشان دادیم که می‌توان اجزای آن‌ها را در این توالی جا داد.

۱۳. نتیجه‌گیری

گره کند ده یکی از خانواده‌های گره‌های ایرانی است که شمسه‌های آن‌ها بیست‌ضلعی است. این گره‌ها قابلیت خرد شدن را دارند، یعنی می‌توان از یک گره، گرهی در مقیاس خردتر با همان آلات پیدا کرد. رییس زاده و مفید در تقریرهای استاد لرزاده دو روش برای خرد کردن گره‌های کند ده معرفی کرده‌اند. در روش جامع‌تر (روش توحلقی) همهٔ نتایجی که از روش دیگر به دست می‌آمد به اضافهٔ نتایج جدیدی به دست می آید. همین روش با در نظر گرفتن معادل کند گره به دست آمده از آن، مبنای محاسبات این مقاله قرار گرفت. در خرد کردن متوالی، اندازهٔ آلت‌ها در نسبت معکوس با عدد فی کوچک می‌شوند و اگر اندازهٔ زمینه های متوالی را به نحوی بزرگ کنیم که اندازهٔ آلت‌های

متناظر در گره‌ها یکسان باشد، طول اعضای متناظر زمینه‌ها مطابق دنبالۀ فیبوناتچی رشد می‌کند، به نحوی که طول ضلع زمینه برابر جمع طول اضلاع متناظر دو زمینۀ قبلی است. از این ویژگی می‌توان در تحلیل گره ها و حل هندسی و طراحی آن‌ها به روش‌های الگوریتمی استفاده کرد.

سپاسگزاری

نویسندگان مقاله از آقای روح‌الله مجتهدزاده استادیار معماری دانشگاه شهید چمران اهواز برای معرفی منابع مربوط به نسبت طلایی در تمدن اسلامی که در این منابع با نام «نسبت ذات وسط و طرفین» شناخته می‌شده است تشکر به جای می‌آوردند.

پی نوشت ها

۱. گره تزئینات هندسی در معماری اسلامی است که از قرارگرفتن چندضلعی‌های بسته (به نام آلت) در کنار هم و پرکردن سطح تشکیل شده است.

۲. آلت گره یعنی، چندضلعی‌های با زاویه و تناسبات مشخص. مجموعۀ آلت‌های هر گره زمینۀ گره را پرمی‌کنند.

۳. این کلمه را «عِقد» هم که به عربی همان معنی گره را می‌دهد می‌خوانند.

۴. از جمله در کتاب دستور زبان تزیین، نوشتۀ اوِن جونز، چنین تفکیک منطقه‌ای دیده می‌شود. همچنین در دائرةالمعارف هنرهای تزیینی شرق E. Collinot

۵. واگیره‌ها خطوط شعاعی هستند که از مرکز آلت شمسه به رأس‌های آن متصل می‌شوند و امتداد پیدا می‌کنند.

۶. یعنی آلتی که از زاویه‌ها و تناسبات مشخص اضلاع آن آلت پیروی نکند، در نتیجه شکل آن معوج باشد.

۷.نویسندگان مقاله از آقای روح الله مجتهدزاده برای معرفی منابع مربوط به نسبت طلایی در تمدن اسلامی تشکر می‌کنند.

۸. او را به نام لئوناردوی پیزایی Leonardo of Pisa نیز می‌شناسند.

۹. شاه‌گره به گرهی گفته می‌شود که درون آلت‌های آن گره ریزتری ترسیم شده باشد. در واقع آلت‌های گره اولیه که مقیاس درشت‌تری دارد زمینه‌های گره‌های ریزتر باشد.

۱۰. شاه‌گره‌ها نوعی از گره هستند که با قوانین خاصی خرد می‌شوند بنابراین دارای دو مقیاس از گره در زمینۀ خود هستند. منظور از گره ریز شاه‌گره نمونۀ خرد شدۀ ترسیم شده در گره اولیه است.

۱۱. مقدار دقیق این نسبت برابر با Cos (54°)/Sin (54°) است و مقدار تقریبی آن در منابع مختلف ۸ به ۱۱ و ۸۰۰۰ به ۱۱۰۱۱ ذکر شده است.

References

[1] Lurzādah Ḥusayn. Reviving Forgotten Arts, Vol 1. Tehran: Author, 1358. [in Persian]
[لرزاده حسین. احیای هنرهای از یاد رفته، مجلد اول. تهران: مؤلف، ۱۳۵۸.]

[2] Shaʿrbāf Aṣghar. Geometric Arabesque and Ribbed Vaults. Tehran: Iranian Cultural Heritage Organization, 1361. [in Persian]
[شعرباف اصغر. گره و کاربندی. تهران: سازمان میراث فرهنگی، ۱۳۶۱.]

[3] Zumarshīdī Ḥusayn. Girih Tilings in Architecture and Handicrafts. Tehran: Center for University Publishing, 1365. [in Persian]
[زمرشیدی حسین. گره چینی در معماری اسلامی و هنرهای دستی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.]

[4] Māhīr al-Naqsh Mahmūd. Design and Execution of Tiling in Iran: Islamic Period. Tehran: Reza Abbasi Museum, 1361. [in Persian]
[ماهرالنقش محمود. طرح و اجرای نقش در کاشیکاری ایران: دورۀ اسلامی. تهران: موزه رضا عباسی، ۱۳۶۱.]

[5] Bourgoin Jules. Les Arts Arabes. Paris: A. Morel, 1867.

[6] Bourgoin Jules. Les Éléments de l'Art Arabe. Paris: Librairie de Firmin-Didot et cie, 1879. p.24, 82.

[7] Jones Owen. The Grammar of Ornament by Owen Jones: Illustrated by Examples from Various Styles of Ornament. Day

and Son, 1865. p.74,
[8] Necipoğlu Gülru. The Topkapi Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture. California: Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995. p. 61,62.
[9] Hay David R. Original Geometrical Diaper Designs. London: D. Bogue 1849.
[10] Christie Archibald H. Traditional Methods of Pattern Designing; an Introduction to the Study of the Decorative Art. Oxford: Clarendon press.1910.
[11] Lee Anthony J. Islamic Star Patterns. Muqarnas 1987; 4: 182–197.
[12] Kaplan Craig S. Islamic Star Patterns from Polygons in Contact. In: *Proceedings of Graphics Interface 2005*. Canadian Human-Computer Communications Society, p. 177–185.
[13] Navāyī Kāmbīz, Kāmbīz Ḥājīqasemī. Khesht-o Khiāl: An Interpretation of Iranian Islamic Architecture. Tehran: Shahid Beheshti University, Soroush, 1390. p.196. [in Persian]
[نوایی کامبیز، کامبیز حاجی‌قاسمی. خشت و خیال: شرح معماری اسلامی ایران. تهران: دانشگاه شهید بهشتی؛ سروش، ۱۳۹۰. ص. ۱۹۶.]
[14] Sarhangi Reza. Interlocking Star Polygons in Persian Architecture: The Special Case of the Decagram in mosaic Designs. Nexus Network Journal 2012; 1–28. DOI. 10.1007/s00004-012-0117-5.
[15] Bodner BL. From Sultaniyeh to Tashkent Scrolls: Euclidean Constructions of Two Nine-and Twelve-pointed Interlocking star Polygon Designs. Nexus Network Journal 2012; 14: 307–332.
[16] Bonner Jay F. The Historical Significance of the Geometric Designs in the Northeast Dome Chamber of the Friday Mosque at Isfahan. Nexus Network Journal 2016; 18: 55–103.
[17] Rigby John. Creating Penrose-Type Islamic Interlacing Patterns. Proc Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science,(London, 2006), eds R Sarhangi and J Sharp 2006; 41–48.
[18] Islām Panāh Muḥammad Ḥusayn. Poetic Explanation of Self-Similar Geometric Arabesque. Kerman: Author, 1396 [in Persian]
[اسلام‌پناه محمدحسین. شرح منظومه گره در گره. کرمان: محمدحسین اسلام‌پناه، ۱۳۹۶.]
[19] Islām Panāh Muḥammad Ḥusayn. Notes on Drafting Geometric Arabesque. Culture of Iranian Land, Vol 30. 1384; 355-360. [in Persian]
[اسلام‌پناه محمدحسین. تکمله‌ای بر رسم گره. فرهنگ ایران زمین جلد سی‌ام ۱۳۸۴؛ ۳۵۵—۳۶۰.]
[20] Shafizade Asadolah, Saiede Soltan Mohammadlo. Presentation of the Step by Step Model of Knot Drawing Method Based on the Principle of Grinding (Generative). Negareh 1399; 54: 77-94. DOI. 10.22070/negareh.2020.1239 [Original Text in Persian with English Abstract]
[شفیع‌زاده اسدالله، سعیده سلطان‌محمدلو. ارائهٔ مدل گام‌به‌گام روش ترسیم گره بر مبنای قاعدهٔ خرد کردن (زایندگی). نگره ۱۳۹۹؛ ۵۴: ۷۷—۹۴.]
[21] Raʾīszādah Mahnāz, Ḥusayn Mufīd. Reviving Forgotten Arts: Fundamentals of Traditional Architecture in Iran According to Ustad Ḥusayn Lurzādah. Tehran: Mola (Mawlá), 1374. p.141-148. [in Persian]
[رییس‌زاده مهناز، حسین مفید. احیای هنرهای از یادرفته: مبانی معماری سنتی در ایران به روایت استاد حسین لرزاده. تهران: مولی، ۱۳۷۴. ص.۱۴۱–۱۴۸.]
[22] Lu Peter J, Peter J Steinhardt. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. Science 2007; 315: 1106–1110. DOI. 10.1126/science.1135491 p.1107.
[23] Cromwell Peter R. The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-Fold Ornament. The Mathematical Intelligencer 2009; 31 (1): 36-56. DOI. 10.1007/s00283-008-9018-6.
[24] Broug Eric. Islamic Geometric Design. London: Thames & Hudson, 2013.
[25] Saltzman Peter. Quasi-Periodicity in Islamic Geometric Design. In: Williams K, Ostwald MJ (eds) *Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future: Volume I: Antiquity to the 1500s*. New York: Birkhäuser, p. 585–602. DOI: 10.1007/978-3-319-00137-1_39.
[26]Ostwald MJ, Williams K (eds). Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future: Volume I: Antiquity to the 1500s. 1st ed. 2015. New

York: Birkhäuser, 2015.

[27]Levine Dov, Steinhardt Paul J. Quasicrystals. I. Definition and structure. Physical Review B 1986; 34: 596–616. p .609. DOI 10.1103/PhysRevB.34.596.

[28] Fārābī Muḥammad ibn Muḥammad. Encyclopedia of the Sciences. Beirut: Dār va Maktabat al-Hilāl. 1996. p.51 [in Arabic]

[فارابی محمد بن محمد. احصـاء العلـوم. بیـروت: دار و مکتبه الهلال. ۱۹۹۶. ص.۵۱.]

[29] Allard André. The Influence of Arabic Mathematics in the Medieval West. Roshdi Rashed (éd), Encyclopedia of the History of Arabic Science 1996; 3: 539–80.

[30] Stakhov Alexey P. The Golden Section in the Measurement Theory. Computers & Mathematics with Applications 1989; 17 (4-6): 613–638. DOI. 10.1016/0898-1221(89)90252-6 p.616.

[31] Valibeig Nima, Nooshin Nazarieh, Sanaz Rahravi. Comparing Study of Mother Girih in the Drawing Methods Domain, with Offering an Unwrtiten Method. Journal for the History of Science 1396; 15: 251-274. DOI. 10.22059/jihs.2019.237807.371406 [Original Text in Persian with English Abstract]

[ولی بیگ نیما، نوشین نظریه، سـاناز رهـروی. مطالعهٔ مقایسه‌ای گره مادر در گسترهٔ شیوه‌های ترسیم با ارائـه و معرفـی شـیوه‌ای نـامکتوب. تـاریخ علـم ۱۳۹۶؛ ۱۵: ۲۵۱–۲۷۴]